Lo studio del calcolo mentale nella scuola elementare

Michela Lopez e Giacomo Stella

Introduzione

Chiunque non faccia l'insegnante non è in grado di stabilire facilmente se le capacità aritmetiche di un bambino siano adeguate oppure no. Sebbene possediamo una conoscenza intuitiva di fenomeni relativi all'apprendimento della matematica e alla padronanza del calcolo aritmetico, vi è un'assenza di dati sperimentali sulla base dei quali fondare i nostri giudizi, in particolare per quanto riguarda i tempi e le modalità di acquisizione delle operazioni aritmetiche.

Nel campo dello sviluppo è importante sapere come si comporta la popolazione rispetto a determinati fenomeni, per decidere, ad esempio, se un bambino abbia delle disabilità di apprendimento. È necessario quindi circoscrivere tali fenomeni e analizzarli in maniera accurata, in modo da avere a disposizione dati certi e precisi sul comportamento della popolazione con i quali confrontare le prestazioni dei singoli.

Lo scopo del nostro studio è appunto quello di analizzare nella maniera più precisa possibile le capacità dei bambini di scuola elementare di risolvere le operazioni aritmetiche. In particolare abbiamo scelto l'addizione, ma abbiamo ulteriormente circoscritto l'area, limitandola all'addizione a 2 addendi con somma uguale o inferiore a 10, poiché questo ambito di studio del calcolo e del processamento numerico rappresenta un argomento a sé stante. Si ritiene infatti che l'individuo allenato riesca a svolgere tali operazioni molto rapidamente, arrivando alla soluzione senza operazioni intermedie e, quindi, con un accesso diretto (la letteratura specialistica parla in questo caso di «fatto aritmetico»); per le operazioni che includono numeri grandi vengono usate invece strategie diverse (Geary, 1996). Gallistel e Gelman (1992) e Dehaene (1992) sostengono che le persone nascono con un sistema numerico che può rappresentare le quantità da 1 a 9, mentre le rappresentazioni di numeri più grandi si sviluppano con l'esperienza. Sicuramente l'apprendimento dei numeri fino a 10 è agevolato dalla possibilità di aiutarsi con le dita nel conteggio e nel calcolo. Attraverso due esperimenti Geary (1996) ha analizzato l'effetto della dimensione del problema nell'addizione mentale: più grande è la somma, più tempo ci vuole per dare la risposta. Egli conclude che tale effetto è legato a diversi fattori: la maggior esposizione a problemi con numeri piccoli che a problemi con numeri grandi; la presenza di associazioni competitive che vengono attivate più facilmente con l'aumentare della dimensione degli addendi (per esempio, ci può essere un'interferenza tra codici per l'addizione e codici per la moltiplicazione, per cui si attribuisce il risultato 18 all'addizione 6 + 3); l'organizzazione dei fatti aritmetici in una rete simile a una matrice a due dimensioni, per cui nei casi di numeri grandi occorre più tempo perché i nostri indicatori mentali si spostino in senso orizzontale e verticale fino alle coordinate adatte al problema (Ashcraft e Battaglia, 1978).

Questi argomenti hanno motivato la nostra scelta, insieme alle interessanti ricerche condotte in passato sulle strategie usate nella risoluzione di tali operazioni. Tra queste, degna di nota risulta la ricerca condotta da Groen e Parkman (1972) sulle procedure utilizzate dai bambini piccoli per risolvere semplici addizioni. Essi sottoposero a bambini di prima elementare tutte le possibili combinazioni di addizioni a 2 addendi aventi somma uguale o inferiore a 9. I bambini più grandi e gli adulti risolvono tali operazioni recuperando il risultato dalla memoria a lungo termine, ma i bambini in età prescolare e quelli di prima elementare ancora non conoscono questo risultato (Gagné, 1996). Nonostante ciò, essi riescono a eseguire con successo tali operazioni (ibidem): Groen e Parkman (1972) hanno riscontrato nei bambini di prima un tasso medio di successo del 97% per problemi di questo tipo. Con il loro studio i ricercatori intendevano scoprire il modo in cui i bambini arrivavano a dare le risposte. Essi avevano ipotizzato che questo potesse avvenire in 5 modi: contare entrambi i numeri (nel caso di 2 + 4 o 4 + 2 il bambino conterebbe 1, 2, 3, 4, 5, 6); contare a partire dal primo numero (nel caso di 2 + 4 il bambino conterebbe 3, 4, 5, 6); contare a partire dal secondo numero (nel caso di 2 + 4 il bambino conterebbe 5, 6); contare a partire dal numero più piccolo (nel caso di 2 + 4 o 4 + 2 il bambino conterebbe 3, 4, 5, 6); contare a partire dal numero più grande (nel caso di 2 + 4 o 4 + 2 il bambino conterebbe 5, 6). Quest'ultima procedura è la più efficiente tra le 5, richiedendo il conteggio minore: per tale motivo il modello a essa sottostante è divenuto noto come *modello del minimo*.

Attraverso la tecnica di Sternberg (1969), che utilizza i dati di latenza temporale nella risposta per dar conto delle operazioni computazionali che vengono effettuate nell'esecuzione di un compito, Groen e Parkman scoprirono che il 68% dei bambini di prima elementare utilizzavano il modello del minimo, prendendo come punto di partenza il maggiore degli addendi e contando poi per un numero di unità pari all'altro addendo. L'aspetto più interessante di questa scoperta è che l'algoritmo del modello del minimo implicato non viene di solito insegnato direttamente ai bambini come procedura di calcolo, quindi l'inferenza ovvia è che essi lo scoprono da soli. Per verificare questa ipotesi Groen e Resnick (1977) insegnarono a un certo numero di bambini di quattro anni che ancora non conoscevano l'addizione a effettuare somme mediante l'algoritmo del modello del conteggio totale, detto *modello della somma* (per cui si conta fino al primo numero *m* e si continua per altri *n* numeri). Essi osservarono che, dopo un certo numero di prove, i bambini sostituivano il modello della somma con quello del minimo, probabilmente perché quest'ultimo risulta più efficace, sia per il minor tempo che richiede sia per il maggior numero di oggetti che permette di contare sul momento, nonostante il modello della somma sia più facile da dimostrare e insegnare ai bambini piccoli (ibidem). Lo studio di Groen e Resnick fornisce prove eloquenti di invenzioni spontanee di algoritmi di addizione da parte di bambini in età scolare.

Esistono altre strategie comunemente usate nella risoluzione di semplici addizioni: per esempio, far riferimento a 10 per addizioni aventi come somma 9, per cui per risolvere 4 + 5 il bambino sottrarrebbe 1 al risultato di 5 + 5; oppure la suddivisione degli addendi in numeri più piccoli, per cui il bambino scomporrebbe 6 + 7 in 6 + 6 + 1 (Cumming e Elkins, 1999).

L'individuazione delle strategie più efficaci nella risoluzione di problemi aritmetici semplici e complessi costituisce uno degli obiettivi centrali per la didattica della matematica. Questo non solo per migliorare le prestazioni di bambini normodotati, ma anche per individuare gli interventi più adatti per soggetti con deficit del calcolo e del numero, che costituiscono il 5% della popolazione scolastica (Kosch, 1976).

Lo studio sperimentale

Con il nostro studio ci siamo posti in primo luogo l'obiettivo di raccogliere dati precisi sui tempi di risoluzione di addizioni semplici da parte di bambini di scuola elementare, sul numero di errori e omissioni commesse; in secondo luogo abbiamo tentato di avanzare delle ipotesi sulle strategie utilizzate per lo svolgimento di tali operazioni.

Il campione esaminato è formato da 177 bambini di età compresa tra i 7 e i 9 anni (85 di seconda e 92 di terza elementare), a cui sono state proposte oralmente le 45 addizioni a 2 addendi che hanno un risultato uguale o inferiore a 10 (vedi tabella 1). Le operazioni sono state proposte attraverso l'impiego di 5 CD audio contenenti ciascuno 9 addizioni, ognuna preceduta da un «beep» che aveva il duplice scopo di segnalare lo scadere del tempo di risposta concesso per l'addizione precedente e di allertare il soggetto per la domanda successiva. In totale, i bambini dovevano risolvere mentalmente 45 operazioni avendo a disposizione 3,5 secondi per ognuna di esse.

La prova è stata somministrata individualmente durante la seconda metà dell'anno scolastico, in un arco temporale di circa 8 settimane. A una presentazione generale del compito fatta inizialmente a ciascun gruppo classe, è seguita una spiegazione più dettagliata data a ogni soggetto subito prima dell'inizio della somministrazione. Per evitare che l'ansia da valutazione interferisse con le prestazioni, la prova è stata presentata sotto forma di gioco e si è spiegato ai bambini che in nessun caso gli insegnanti e i genitori sarebbero venuti a conoscenza del loro rendimento.

Ai soggetti che non riuscivano a rispondere ad alcuna domanda del primo CD (1 di terza, 7 di seconda, tra cui 2 individui disabili) è stato somministrato un test sostitutivo in cui era concesso maggior tempo di risposta ma i cui risultati non sono stati considerati nell'analisi finale.

Tabella 1

Addizioni a 2 addendi con somma uguale o inferiore al 10

1 + 1	1 + 2	1 + 3	1 + 4	1 + 5	1 + 6	1 + 7	1 + 8	1 + 9
	2 + 1	2 + 2	2 + 3	2 + 4	2 + 5	2 + 6	2 + 7	2 + 8
		3 + 1	3 + 2	3 + 3	3 + 4	3 + 5	3 + 6	3 + 7
			4 + 1	4 + 2	4 + 3	4 + 4	4 + 5	4 + 6
				5 + 1	5 + 2	5 + 3	5 + 4	5 + 5
					6 + 1	6 + 2	6 + 3	6 + 4
						7 + 1	7 + 2	7 + 3
							8 + 1	8 + 2
								9 + 1

pochi errori. Più numerose sono invece le omissioni, in media 7 per bambino. Per valutare la difficoltà delle operazioni abbiamo utilizzato 3 parametri (tempo di risposta, numero di errori, numero di omissioni), che però sono stati analizzati separatamente.

Le addizioni che richiedono maggior tempo sono 3 + 6 (2,19 secondi), 4 + 6 (2,02 secondi), 3 + 4 (1,98 secondi); quelle con maggior numero di errori sono 2 + 4 e 7 + 3 (6 errori), 2 + 5 (8 errori) e 2 + 3 (12 errori); infine, troviamo il maggior numero di omissioni con 2 + 7 e 3 + 6 (28 omissioni), 3 + 7 (29 omissioni), 4 + 6 (31 omissioni). Le addizioni che vengono risolte più rapidamente sono 1 + 1 e 5 + 5 (0,61 secondi), 2 + 2 (0,73 secondi), 9 + 1 (0,78 secondi); quelle con il minor numero di errori sono 1 + 9 e 7 + 1 (nessun errore); 1 + 1, 1 + 3, 1 + 4, 1 + 8, 3 + 1, 3 + 3, 4 + 1, 5 + 1, 5 + 5, 6 + 2, 9 + 1 (1 errore); 1 + 6, 2 + 1, 2 + 2, 2 + 7, 2 + 8, 3 + 5, 3 + 7, 4 + 4, 5 + 2, 6 + 1, 6 + 3, 7 + 2, 8 + 2 (2 errori); infine vi è il minor numero di omissioni con 2 + 2 (nessuna omissione), 1 + 1, 4 + 1, 5 + 1, 8 + 1 (1 omissione); 2 + 1, 5 + 5, 6 + 1, 7 + 1 (2 omissioni).

Nella tabella 3 è riportato il tempo medio impiegato dai bambini di seconda elementare per risolvere le addizioni con somma inferiore a 11: le operazioni sono poste in ordine, da quella risolta più velocemente a quella che richiede maggior tempo.

Si può osservare che le operazioni su cui si concentra il maggior numero di difficoltà sono quelle con somma superiore a 6 (fatte alcune eccezioni), mentre sembra emergere che le operazioni con 2 addendi uguali sono le più facili in assoluto e molto semplici risultano anche quelle in cui 1 dei 2 addendi è 1. Probabilmente, in questi casi i soggetti recuperano il risultato direttamente dalla memoria a lungo termine piuttosto che eseguire il calcolo.

Con l'accrescersi del secondo addendo la velocità diminuisce: ciò potrebbe far pensare che i bambini in seconda e terza elementare non abbiano ancora acquisito in modo stabile la strategia del minimo, secondo cui il soggetto conterebbe a partire dal numero più grande

Tabella 2

Dati generali emersi dallo studio sperimentale condotto su bambini di seconda e terza elementare: numero di soggetti che non rispondono, tempo medio di risposta, numero medio di errori e omissioni

	SECONDA ELEMENTARE	TERZA ELEMENTARE
Totale soggetti	85	92
Numero di soggetti che non rispondono	7	1
Tempo medio	1,34	1,10
Numero medio di errori	1,59	1,60
Numero medio di omissioni	7	2,33

Risultati

In generale, si è visto che i bambini tra i 7 e i 9 anni frequentanti la scuola elementare risolvono con rapidità a mente addizioni a 2 addendi con somma compresa tra 2 e 10. Infatti, il tempo medio di risposta è 1,34 secondi per le seconde e 1,10 secondi per le terze, con una differenza altamente significativa (test t per campioni indipendenti, $p < 0{,}0001$) tra i 2 gruppi.

Su 85 soggetti di seconda solo 7, tra i quali 2 soggetti in situazione di handicap di media gravità, non rispondono ad alcuna domanda del primo CD, mentre dei 92 di terza solamente un soggetto non risponde.

Il numero di errori compiuti è piuttosto esiguo, simile nei bambini di seconda (in media 1,59 per soggetto, in totale 124 su 3510 risposte) e di terza (in media 1,60 per soggetto, in totale 146 su 4095 risposte), mentre in seconda elementare le omissioni sono più numerose, in media 7 per soggetto (in totale 546 su 3510 risposte) e 2,33 per soggetto in terza elementare (in totale 212 su 4095 risposte), con una differenza evidentemente importante tra i 2 gruppi.

Questi risultati dimostrano che, sebbene i soggetti di entrambi i gruppi siano in grado di compiere le operazioni oggetto del nostro studio (come testimonia l'esiguo numero di errori e di soggetti che non rispondono ad alcuna domanda delle prime 9 somministrate), i bambini più grandi e più in avanti nel percorso scolastico le risolvono più velocemente e con un minor numero di omissioni. D'altronde, durante la somministrazione del test, molti più bambini di terza piuttosto che di seconda dichiaravano di trovare la prova troppo facile.

Evidentemente nel corso di un solo anno vi è un notevole incremento di padronanza nella risoluzione mentale di tali addizioni.

Risultati delle seconde elementari

I bambini di seconda risolvono velocemente le addizioni proposte e commettono

Tabella 3

Livello di difficoltà delle addizioni con somma < 11: graduatoria in base al tempo medio di risposta dei bambini di seconda elementare

ADDIZIONI	TEMPO DI RISPOSTA SECONDA ELEMENTARE
1 + 1, 5 + 5	0,61
2 + 2	0,73
9 + 1	0,78
3 + 3	0,84
8 + 1	0,98
7 + 1	0,99
4 + 4	1,00
1 + 5	1,01
1 + 9	1,02
4 + 1, 6 + 1	1,04
5 + 1	1,05
2 + 1	1,08
1 + 2	1,10
1 + 8, 1 + 4	1,11
1 + 6	1,18
5 + 2	1,22
3 + 1	1,30
1 + 7	1,32
6 + 2	1,34
1 + 3	1,36
8 + 2	1,38
7 + 2	1,41
2 + 3	1,46
3 + 2	1,50
2 + 5	1,58
2 + 4, 7 + 3	1,62
2 + 7	1,67
2 + 8, 5 + 3	1,68
5 + 4	1,70
6 + 3	1,77
3 + 5	1,80
4 + 5	1,84
6 + 4	1,85
2 + 6	1,86
3 + 7	1,87
4 + 3	1,92
2 + 4	1,94
3 + 4	1,98
4 + 6	2,02
3 + 6	2,19

(nel caso di 2 + 4 conterebbe 4, 5, 6), ma nemmeno utilizzino sempre la strategia di contare entrambi i numeri (nel caso di 2 + 4: 1, 2, 3, 4, 5, 6), altrimenti il calcolo richiederebbe sempre lo stesso tempo. Essi utilizzerebbero frequentemente la strategia di partire dal primo numero e aggiungere il secondo (nel caso di 2 + 4: 2, 3, 4, 5, 6).

Risultati delle terze elementari

I risultati dei bambini di terza differiscono dai risultati dei bambini di seconda per un tempo di risposta significativamente inferiore e un minor numero di omissioni, in media 2,33 per bambino.

Per quanto riguarda la difficoltà degli item troviamo delle corrispondenze con le seconde: le addizioni che richiedono maggior tempo sono 2 + 6 (1,61 secondi), 3 + 6 e 3 + 7 (1,86 secondi), 4 + 6 (1,90 secondi); quelle con maggior numero di errori sono 3 + 7 e 7 + 3 (7 errori), 4 + 3, 4 + 5 e 4 + 6 (8 errori), 3 + 4, 3 + 6 e 6 + 4 (9 omissioni); infine vengono omesse più frequentemente 3 + 7 (15 omissioni), 3 + 6 e 4 + 6 (17 omissioni), 3 + 4 (18 omissioni).

Le operazioni risolte più rapidamente sono 5 + 5 (0,46 secondi), 1 + 1 (0,53 secondi), 9 + 1 (0,58 secondi; quelle con il minor numero di errori sono 1 + 1, 3 + 3, 4 + 1, 4 + 2, 4 + 4, 5 + 1, 5 + 5, 7 + 1, 9 + 1 (nessun errore); 1 + 2, 1 + 4, 1 + 5, 1 + 7, 2 + 2, 2 + 6, 5 + 3, 6 + 1 (1 errore); quelle con meno omissioni sono 1 + 4, 2 + 1, 3 + 1, 3 + 3, 4 + 1, 5 + 1, 5 + 2, 5 + 5, 6 + 1 (nessuna omissione); 1 + 2, 4 + 2, 7 + 3 (1 omissione).

Nella tabella 4 sono riportati i tempi medi di risposta dei bambini di terza elementare alle addizioni con somma uguale o inferiore a 10: le operazioni sono poste in ordine, da quella che richiede il tempo minore a quella che richiede il tempo maggiore.

Si possono quindi replicare le considerazioni fatte in relazione ai risultati delle seconde elementari: le operazioni su cui si concentra il maggior numero di difficoltà sono quelle con somma superiore a 6 (fatte alcune eccezioni); le più facili in assoluto sono quelle con 2 addendi uguali e quelle in cui 1 dei 2 addendi è 1. Inoltre si rileva come tendenza il fatto che, all'accrescersi del secondo addendo, la velocità diminuisce.

Confronti tra addizioni

Al fine di studiare le strategie impiegate dai bambini tra i 7 e 9 anni per risolvere le addizioni a 2 addendi aventi risultato uguale o minore di 10, risulta interessante confrontare le prestazioni dei soggetti in risposta a operazioni composte dagli stessi addendi in ordine inverso.

Se il bambino utilizzasse la strategia del conteggio totale, impiegherebbe più o meno lo stesso tempo per risolvere operazioni quali 2 + 7 e 7 + 2: in entrambi i casi conterebbe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Se invece utilizzasse la strategia del conteggio a partire dal primo numero, il tempo di risposta dovrebbe essere significativamente superiore quando il primo addendo è più piccolo del secondo (nel caso di 2 + 7 il bambino conterebbe 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) rispetto a quando il primo addendo è più grande (nel caso di 7 + 2 conterebbe 8, 9).

La differenza in termini di tempo impiegato nella risoluzione di addizioni composte

Tabella 4

Livello di difficoltà delle addizioni con somma < 11: graduatoria in base al tempo medio di risposta dei bambini di terza elementare

ADDIZIONI	TEMPO DI RISPOSTA TERZA ELEMENTARE
5 + 5	0,46
1 + 1	0,53
9 + 1	0,58
2 + 2	0,59
6 + 1	0,68
4 + 1	0,70
1 + 5	0,71
1 + 2	0,73
8 + 1	0,75
7 + 1	0,78
1 + 4, 5 + 1	0,79
4 + 4	0,81
2 + 1	0,85
1 + 9, 3 + 3	0,86
3 + 1	0,89
1 + 6	0,90
1 + 8	0,91
1 + 7	0,96
8 + 2	0,97
1 + 3	1,03
7 + 2	1,04
6 + 2	1,08
5 + 2	1,14
5 + 4, 4 + 2	1,21
3 + 2	1,24
4 + 5	1,28
2 + 4	1,38
5 + 3	1,39
2 + 3	1,40
2 + 5, 2 + 8	1,41
7 + 3	1,47
6 + 3, 6 + 4	1,51
3 + 4, 3 + 5	1,53
4 + 3	1,58
2 + 7	1,60
2 + 6	1,61
3 + 6, 3 + 7	1,86
4 + 6	1,90

dagli stessi addendi in ordine inverso si ridurrebbe se il soggetto utilizzasse la strategia del minimo, ma anche in questo caso sarebbe maggiore il tempo impiegato per risolvere 2 + 7 rispetto a 7 + 2, considerando il tempo necessario a invertire l'ordine degli addendi. Sia per 2 + 7 che per 7 + 2 il bambino conterebbe 8, 9.

Nel nostro studio sono stati confrontati i tempi di risposta, il numero di omissioni e il numero di errori nella risoluzione di operazioni aventi gli stessi addendi in ordine inverso e sono state avanzate alcune ipotesi sulle strategie impiegate, anche se la mancanza di strumenti che misurino la latenza temporale nella risposta ci impedisce di indagare le operazioni computazionali utilizzate durante lo svolgimento del compito.

Confronti tra addizioni: risultati delle seconde

Attraverso l'uso del *t* di Student e del test binomiale sono state individuate differenze significative nei tempi di risposta, nel numero di omissioni e di errori tra operazioni aventi gli stessi addendi in ordine inverso.

Le operazioni sono state raggruppate in 4 categorie, secondo il grado di significatività delle differenze nei tempi di risposta.

1. differenze altamente significative ($p < 0.0001$ e $p < 0.001$): 2 + 6 e 6 + 2, 3 + 6 e 6 + 3;
2. differenze molto significative ($p < 0,01$): 1 + 7 e 7 + 1, 1 + 8 e 8 + 1, 1 + 9 e 9 + 1, 2 + 4 e 4 + 2, 2 + 5 e 5 + 2, 2 + 7 e 7 + 2;
3. differenze significative ($p < 0.05$): 2 + 8 e 8 + 2, 3 + 5 e 5 + 3, 3 + 7 e 7 + 3;
4. differenze non significative: 1 + 2 e 2 + 1, 1 + 3 e 3 + 1, 1 + 4 e 4 + 1, 1 + 5 e 5 + 1, 1 + 6 e 6 + 1, 2 + 3 e 3 + 2, 3 + 4 e 4 + 3, 4 + 5 e 5 + 4, 4 + 6 e 6 + 4.

Anche per il numero di omissioni sono state riscontrate differenze significative:

1. differenze altamente significative ($p < 0,0001$ e $p < 0,001$): 1 + 8 e 8 + 1, 1 + 7 e 7 + 1, 1 + 9 e 9 + 1, 2 + 6 e 6 + 2;
2. differenze molto significative ($p < 0,01$): 1 + 6 e 6 + 1, 2 + 7 e 7 + 2, 2 + 8 e 8 + 2, 3 + 6 e 6 + 3, 3 + 7 e 7 + 3;
3. differenze significative ($p < 0,05$): 1 + 4 e 4 + 1, 1 + 5 e 5 + 1, 2 + 4 e 4 + 2, 3 + 4 e 4 + 3, 3 + 5 e 5 + 3;
4. differenze non significative: 1 + 2 e 2 + 1, 1 + 3 e 3 + 1, 2 + 3 e 3 + 2, 2 + 5 e 5 + 2, 4 + 5 e 5 + 4, 4 + 6 e 6 + 4.

Per il numero di errori solo le differenze tra 2 + 3 e 3 + 2 e tra 2 + 5 e 5 + 2 sono risultate significative ($p < 0,05$).

Nella tabella 5a sono riportate le differenze riscontrate in seconda elementare nella risoluzione di operazioni aventi gli stessi addendi posti in ordine inverso, in relazione al tempo di risposta, al numero di omissioni e al numero di errori. Nella tabella 5b è riportata l'analisi della significatività di tali differenze.

Confronti tra addizioni: risultati delle terze

Anche per le terze elementari (vedi tabelle 6a e 6b) le operazioni sono state raggruppate in 4 categorie, secondo il grado di significatività delle differenze nei tempi di risposta:

1. differenze altamente significative ($p < 0.0001$ e $p < 0.001$): 1 + 9 e 9 + 1, 2 + 6 e 6 +

Tabella 5a

Operazioni aventi gli stessi addendi posti in ordine inverso: confronti in base al tempo di risposta (T) al numero di omissioni (O) e al numero di errori (E) in seconda elementare

	T	O	E
1 + 2	1,10	5	4
2 + 1	1,08	2	2
1 + 3	1,36	9	1
3 + 1	1,30	8	1
1 + 4	1,11	8	1
4 + 1	1,04	1	1
1 + 5	1,01	8	3
5 + 1	1,05	1	1
1 + 6	1,18	14	2
6 + 1	1,04	2	2
1 + 7	1,32	17	3
7 + 1	0,99	2	0
1 + 8	1,11	21	1
8 + 1	0,98	1	3
1 + 9	1,02	18	0
9 + 1	0,78	3	1
2 + 3	1,46	13	12
3 + 2	1,50	7	3
2 + 4	1,94	14	6
4 + 2	1,62	4	4
2 + 5	1,58	12	8
5 + 2	1,22	7	2
2 + 6	1,86	21	4
6 + 2	1,34	4	1
2 + 7	1,67	28	2
7 + 2	1,41	13	2
2 + 8	1,68	22	2
8 + 2	1,38	6	2
3 + 4	1,98	24	3
4 + 3	1,92	14	3
3 + 5	1,80	24	2
5 + 3	1,68	14	4
3 + 6	2,19	28	5
6 + 3	1,67	13	2
3 + 7	1,87	29	2
7 + 3	1,62	12	6
4 + 5	1,84	26	3
5 + 4	1,70	18	4
4 + 6	2,02	31	3
6 + 4	1,85	22	3

Tabella 5b

Analisi della significatività delle differenze tra operazioni aventi gli stessi addendi in ordine inverso (in seconda elementare). I valori significativi sono indicati in corsivo

	T	O	E
1 + 2, 2 + 1	0,43696014	0,1640625	0,234375
1 + 3, 3 + 1	0,59267111	0,18547058	0,5
1 + 4, 4 + 1	0,16874941	*0,01757813*	0,5
1 + 5, 5 + 1	0,64985179	*0,01757813*	0,25
1 + 6, 6 + 1	0,31000003	*0,00183105*	0,375
1 + 7, 7 + 1	*0,00292303*	*0,00032616*	0,125
1 + 8, 8 + 1	*0,0079273*	*< 0,0001*	0,25
1 + 9, 9 + 1	*0,00141742*	*0,00063419*	0,5
2 + 3, 3 + 2	0,59304853	0,07392883	*0,0138855*
2 + 4, 4 + 2	*0,00153977*	*0,01167297*	0,20507813
2 + 5, 5 + 2	*0,00179773*	0,09610748	*0,04394531*
2 + 6, 6 + 2	*0,00011874*	*0,000377*	0,15625
2 + 7, 7 + 2	*0,00868115*	*0,00801268*	0,375
2 + 8, 8 + 2	*0,03510682*	*0,00140347*	0,375
3 + 4, 4 + 3	0,27899056	*0,03517763*	0,3125
3 + 5, 5 + 3	*0,01279009*	*0,03517763*	0,234375
3 + 6, 6 + 3	*0,00021814*	*0,00801268*	0,1640625
3 + 7, 7 + 3	*0,02829708*	*0,00359189*	0,109375
4 + 5, 5 + 4	0,10965595	0,05852204	0,2734375
4 + 6, 6 + 4	0,10150984	0,05135067	0,3125

2, 2 + 7 e 7 + 2, 2 + 8 e 8 + 2, 4 + 6 e 6 + 4, 1 + 6 e 6 + 1, 3 + 6 e 6 + 3, 3 + 7 e 7 + 3;
2. differenze molto significative ($p < 0{,}01$): 1 + 8 e 8 + 1, 2 + 5 e 5 + 2;
3. differenze significative ($p < 0{,}05$): 1 + 3 e 3 + 1, 1 + 7 e 7 + 1, 2 + 4 e 4 + 2;
4. differenze non significative: 1 + 2 e 2 + 1, 1 + 4 e 4 + 1, 1 + 5 e 5 + 1, 2 + 3 e 3 + 2, 3 + 4 e 4 + 3, 3 + 5 e 5 + 3, 4 + 5 e 5 + 4.

Nei risultati dei bambini di terza piuttosto che in quelli di seconda vi è un maggior numero di differenze significative tra tempi di risposta a operazioni aventi gli stessi addendi posti in ordine inverso: questo, accoppiato alla velocità di risposta comunque inferiore dei bambini di seconda, fa pensare che in seconda elementare si impieghi più frequentemente la strategia di contare entrambi i numeri (utilizzando la quale il tempo per risolvere 2 + 7 non sarebbe molto diverso da quello per risolvere 7 + 2), che viene via via abbandonata con l'aumentare dell'età.

Per il numero di omissioni vi è una differenza altamente significativa tra 3 + 7 e 7 + 3 ($p < 0{,}001$); differenze significative tra 1 + 6 e 6 + 1, 2 + 5 e 5 + 2, 2 + 6 e 6 + 2, 2 + 8 e 8 + 2, 3 + 4 e 4 + 3, 3 + 6 e 6 + 3 ($p < 0{,}05$). Nel caso delle omissioni il numero di differenze significative diminuisce rispetto alle seconde.

Non sono state trovate differenze significative nel numero di errori, mentre nelle seconde ve ne erano solo due.

Effetto della dimensione del problema

Per analizzare l'effetto della dimensione del problema nell'addizione mentale (Geary, 1996), abbiamo riportato i dati relativi alle medie dei tempi di risposta, del numero di omissioni e di errori ad addizioni aventi somma 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, in 2 grafici, rispettivamente per le seconde e le terze elementari (vedi figure 1 e 2).

Abbiamo osservato che in seconda elementare i tempi variano al crescere della grandezza della somma degli addendi da 1,09 a 1,57 secondi, con un trend ascendente dalla somma 3 fino a 9 (fatta eccezione per la somma 8) e discendente da 9 a 10. Le differenze nei tempi di risposta sono comunque minime: il tempo di risposta minore è di 1,09 sec. (somma 3), il maggiore di 1,57 (somma 9).

La grandezza della somma sembra influenzare il numero di omissioni. Anche in questo caso troviamo un trend ascendente dalla somma 3 alla somma 9 (fatta eccezione per la somma 6) e discendente da 9 a 10. In questo caso le differenze sono più evidenti: si passa da una media di 3,5 omissioni (somma 3) a una media di 18,5 omissioni (somma 9).

Per quanto riguarda gli errori non abbiamo osservato trend particolari: il numero maggiore di errori si concentra sulla somma 9 (in media 5 errori per bambino) e 7 (in media 4,83 errori), mentre troviamo il numero minimo di errori sulla somma 6 (in media 1 errore per bambino).

Anche in terza elementare i tempi variano al crescere della grandezza della somma degli addendi. Il tempo di risposta sembra aumentare all'aumentare della grandezza della somma: abbiamo un trend ascendente dalla somma 3 (media 0,79) alla somma 9 (media 1,27), fatta eccezione per il 6, e discendente da 9 a 10 (media 1,22).

Il numero di omissioni tende ad accrescersi all'aumentare della dimensione della

Tabella 6a

Operazioni aventi gli stessi addendi posti in ordine inverso: confronti in base al tempo di risposta (T) al numero di omissioni (O) e al numero di errori (E) in terza elementare

	T	O	E
1 + 2	0,73	1	1
2 + 1	0,85	0	4
1 + 3	1,03	2	3
3 + 1	0,89	0	3
1 + 4	0,79	0	1
4 + 1	0,70	0	0
1 + 5	0,71	3	1
5 + 1	0,79	0	0
1 + 6	0,90	6	2
6 + 1	0,68	0	1
1 + 7	0,96	7	1
7 + 1	0,78	2	0
1 + 8	0,91	6	2
8 + 1	0,75	2	3
1 + 9	0,86	4	2
9 + 1	0,58	2	0
2 + 3	1,40	3	4
3 + 2	1,24	2	5
2 + 4	1,38	4	4
4 + 2	1,21	1	0
2 + 5	1,41	6	6
5 + 2	1,14	0	3
2 + 6	1,61	8	1
6 + 2	1,08	2	2
2 + 7	1,60	6	5
7 + 2	1,04	6	4
2 + 8	1,41	10	2
8 + 2	0,97	2	4
3 + 4	1,53	18	9
4 + 3	1,58	7	8
3 + 5	1,53	7	6
5 + 3	1,39	4	1
3 + 6	1,86	17	9
6 + 3	1,51	9	5
3 + 7	1,86	15	7
7 + 3	1,47	1	7
4 + 5	1,28	3	8
5 + 4	1,21	6	4
4 + 6	1,90	17	8
6 + 4	1,51	14	9

Tabella 6b

Analisi della significatività delle differenze tra operazioni aventi gli stessi addendi in ordine inverso (in terza elementare). I valori significativi sono indicati in corsivo

	T	O	E
1 + 2, 2 + 1	0,21206104	0,5	0,15625
1 + 3, 3 + 1	*0,04732328*	0,25	0,3125
1 + 4, 4 + 1	0,1103481	1	0,5
1 + 5, 5 + 1	0,35780599	0,125	0,5
1 + 6, 6 + 1	*0,00016567*	*0,015625*	0,375
1 + 7, 7 + 1	*0,01976679*	0,0703125	0,5
1 + 8, 8 + 1	*0,00138806*	0,109375	0,3125
1 + 9, 9 + 1	< *0,0001*	0,234375	0,25
2 + 3, 3 + 2	0,07309839	0,3125	0,24609375
2 + 4, 4 + 2	*0,03430376*	0,15625	0,0625
2 + 5, 5 + 2	*0,00562679*	*0,015625*	0,1640625
2 + 6, 6 + 2	< *0,0001*	*0,04394531*	0,375
2 + 7, 7 + 2	< *0,0001*	0,22558594	0,24609375
2 + 8, 8 + 2	< *0,0001*	*0,01611328*	0,234375
3 + 4, 4 + 3	0,96206183	*0,01432598*	0,18547058
3 + 5, 5 + 3	0,14350459	0,16113281	0,0546875
3 + 6, 6 + 3	*0,00023958*	*0,04655942*	0,12219238
3 + 7, 7 + 3	*0,00021374*	*0,00024414*	0,20947266
4 + 5, 5 + 4	0,84908605	0,1640625	0,12084961
4 + 6, 6 + 4	< *0,0001*	0,12348524	0,18547058

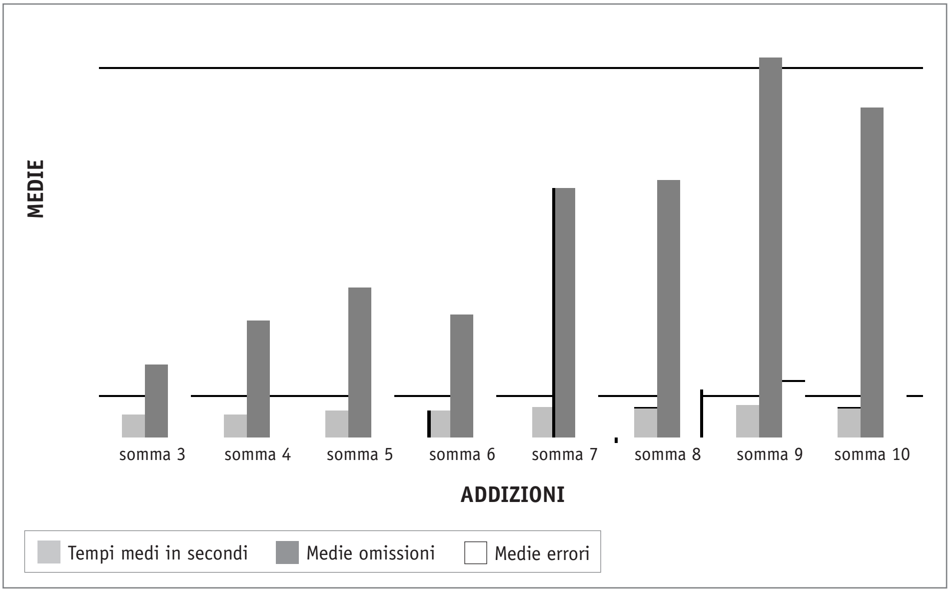

Fig. 1 Confronti tra addizioni aventi somma uguale in seconda elementare: medie dei tempi di risposta, del numero di omissioni, del numero di errori.

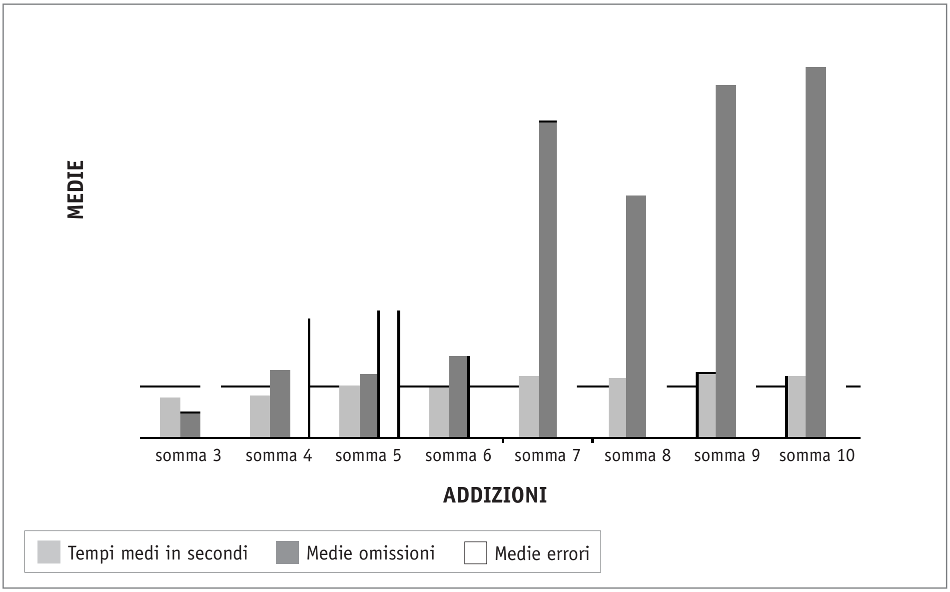

Fig. 2 Confronti tra addizioni aventi somma uguale in terza elementare: medie dei tempi di risposta, del numero di omissioni, del numero di errori.

essi (Geary, 1994; 1996; Stevenson et al., 1990a; Stevenson e Stigler, 1992).

2. In ogni caso i bambini di seconda elementare sono sorprendentemente bravi: risolvono le addizioni in un tempo estremamente breve, compiono pochi errori e non molte omissioni. La padronanza nella risoluzione mentale di semplici addizioni è già elevata a quest'età.
3. La grandezza del secondo addendo influenza il tempo di risposta. La velocità è massima quando il secondo addendo è uguale al primo, perché il risultato viene recuperato direttamente dalla memoria a lungo termine e questo potrebbe avvenire anche per le addizioni in cui il secondo addendo è uguale a 1. Probabilmente i bambini più grandi e gli adulti utilizzano il recupero dalla memoria anche per addizioni meno facili, aventi comunque come risultato numeri non troppo grandi. Quando il secondo addendo è più grande del primo la velocità diminuisce: ciò fa pensare che i bambini usino raramente la strategia di contare entrambi i numeri. Essi utilizzerebbero la strategia di partire dal primo numero e aggiungere il secondo oppure quella del minimo. In entrambi i casi la risoluzione di operazioni aventi il secondo addendo più grande del primo risulterebbe più lenta di quella di operazioni con il secondo addendo più piccolo, ma, poiché non ci risulta possibile stimare il tempo necessario a invertire l'ordine degli addendi, non sappiamo determinare quale dei due metodi venga impiegato con più frequenza. Il discorso sulle strategie impiegate nel risolvere semplici addizioni rimane quindi da approfondire: a questo proposito sono auspicabili la creazione e l'utilizzo di strumenti che permettano di individuare il ragionamento compiuto dai bambini mentre calcolano.
4. La grandezza della somma influenza il numero di omissioni e la velocità di risposta, in misura minore il numero di errori: con l'accrescersi della somma aumenta la difficoltà dell'operazione.
5. I bambini di seconda e terza elementare incontrano maggiori difficoltà nel risolvere operazioni in cui i due addendi hanno grandezza simile rispetto alle addizioni in cui la differenza tra i due addendi è maggiore. Questo è più evidente in terza elementare: infatti anche l'utilizzo della strategia del minimo non consente un risparmio significativo in termini di tempo.

Con il presente studio non intendiamo fornire indicazioni esaustive concernenti un campo talmente esteso e poco esplorato qual è quello del calcolo aritmetico, ma speriamo che i risultati possano fungere da incentivo per successive ricerche sull'argomento, attualmente carenti nel nostro Paese. Questo tipo di studi potrebbe produrre utili suggerimenti per un insegnamento più efficace della matematica nella scuola elementare e, di conseguenza, costituire un valido aiuto per i bambini che apprendono l'aritmetica.

MICHELA LOPEZ, Università di Urbino.

Bibliografia

Ashcraft, M. H. (1992). Cognitive arithmetic: a review of data and theory. *Cognition*, 44, 75-106.

somma e possiamo raggruppare le addizioni in 2 cluster: un media di omissioni molto bassa (inferiore al 2) per le somme da 3 a 6 e una media di omissioni compresa tra 4 e 8 per le somme tra 7 a 10.

Un discorso analogo possiamo fare per il numero di errori: per le somme da 3 a 6 troviamo una media di errori compresa tra1 e 2,5, mentre il numero di errori supera il 4 per le somme al di sopra del 6, fatta eccezione per il 7 (media 1,57).

Confronti tra operazioni con somma uguale

Abbiamo confrontato i tempi di risposta, il numero di omissioni e di errori delle operazioni costituite da addendi diversi ma aventi somma uguale.

In seconda elementare i tempi di risposta tendono a essere maggiori quando la dimensione dei 2 addendi è simile (ed esempio: 3 + 4, 4 + 5, 4 + 6), fatta eccezione per le addizioni aventi i 2 addendi uguali.

Notiamo quindi un trend ascendente e poi di nuovo discendente: i tempi aumentano con l'accrescersi del primo addendo fino a un picco corrispondente al punto dove la differenza tra i 2 addendi è minima (ad esempio: 4 + 3), poi si riducono al decrescere del secondo.

Anche per il numero di omissioni e di errori troviamo trend di questo tipo, ma senza differenze particolarmente rilevanti tra le operazioni.

Analogo è l'andamento in terza elementare: i tempi di risposta tendono ad aumentare man mano che si riduce la differenza tra i due addendi (fatta eccezione per le addizioni aventi i due addendi uguali) e poi a diminuire man mano che la differenza tra i due addendi aumenta. Discorso analogo vale per il numero di errori, mentre poco importanti sono le differenze tra le diverse addizioni aventi somma uguale per quanto riguarda le omissioni.

Riassumendo, possiamo dire che i bambini di seconda e terza elementare incontrano maggiori difficoltà nel risolvere operazioni in cui i due addendi hanno grandezza simile e questo è più evidente in terza elementare: in questi casi, infatti, anche l'utilizzo della strategia del minimo non consente un risparmio significativo in termini di tempo.

Conclusioni

Con questo studio abbiamo esaminato il modo in cui i bambini frequentanti la seconda e la terza elementare risolvono mentalmente addizioni a due addendi con somma uguale o inferiore a 10, raccogliendo dati sui tempi di risposta, gli errori commessi e le omissioni compiute. Analizzando questi dati abbiamo fatto delle considerazioni sulle possibili strategie impiegate dai bambini nell'esecuzione di tali addizioni e sulla diversa difficoltà delle operazioni che abbiamo preso in esame.

I risultati sono riassunti nei punti che seguono:

1. Nella risoluzione di semplici addizioni i bambini di terza sono migliori di quelli di seconda: essi sono più veloci e compiono meno omissioni. In media il numero di errori è quasi uguale, ma, considerando la diversa quantità di omissioni nei due gruppi di soggetti, la percentuale di risposte sbagliate rispetto alle risposte esatte si riduce in terza elementare. Nel corso di un solo anno, quindi, la padronanza nella risoluzione mentale di semplici addizioni aumenta notevolmente: con l'aumentare dell'età e l'avanzamento nel percorso scolastico i bambini acquisiscono strategie di calcolo più efficaci, se non altro grazie alla più lunga esposizione ai problemi aritmetici e alla maggior pratica con

(pp. 27-42). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Dowker, A. (1997). Young children's addition estimates. *Mathematical Cognition*, 3 (2), 141-154.

Fodor, J. A. (1988). *La mente modulare*, Bologna, Il Mulino.

Gagné, E. D. (1996). *Psicologia cognitiva e apprendimento scolastico*, Torino, SEI.

Gallistel, C. R., & Gelman, R. (1992). Preverbal and verbal counting. *Cognition*, 44, 43-74.

Geary, D. C. (1993). Mathematical disabilities: cognitive, neuropsychological, and genetic components. *Psychological Bulletin*, 114, 345-362.

Geary, D. C. (1994). *Children's mathematical development: research and pratical application*. Washington, D. C.: American Psychological Association.

Geary, D. C. (1996). The problem size effect in mental addition: developmental cross-national trends. *Mathematical Cognition*, 2 (1), 63-93.

Geary, D. C., & Brown, S. C. (1991). Cognitive addition: strategy choice and speed-of-processing differences in gifted, normal, and mathematically disabled children. *Developmental Psychology*, 27, 398-406.

Geary, D. C.,Widaman, K. F., & Little, T. D. (1986). Cognitive addition and multiplication: evidence for a single memory network. *Memory & Cognition*, 14, 478-487.

Geary, D. C., & Wiley, J. G. (1991). Cognitive addition: strategy choice and speed-of-processing differences in younger and elderly adults. *Psychology and Aging*, 6, 474-483.

Gelman, R., & Gallistel, C. R. (1978). *The Child's Understanding of Number*. Cambrige, MA: Harvard University Press.

Ginsburg, H. P., & Russel, R. L. (1981). Social class and racial influences on early mathematics thinking. *Monographs of the Society for Research in Child Development*, 46, 193.

Ginsburg, H. P., Posner, J. K., & Russel, R. L. (1981). The development of mental addition: a function of school and culture. *Journal of Cross-Cultural Psychology*, 12, 163-178.

Groen, G. J., & Resnick, L. B. (1977). Can preschool children invent additional algorithms? *Journal of Educational Psychology*, 69, 645-52.

Groen, G. J., & Parkman, J. M. (1972). A chronometric analysis of simple addition. *Psychological Review*, 79, 329-43.

Hamann, M. S., & Ashcraft, M. H. (1986). Texbook of the basic addition facts. *Cognitive and Instruction*, 3, 173-192.

Houlian, D. M., & Ginsburg, H. P. (1981). The addiction methods of first and second grade children, *Journal for Research in Mathematics Education*, 12, 329-43.

Karmiloff-Smith, A. (1995). *Oltre la mente modulare. Una prospettiva evolutiva sulla scienza cognitiva*, Bologna, Il Mulino.

Kosch, L. (1976). Developmental dyscalculia. *Journal of Learning Disabilities*, 7, 46-59.

LeFevre, J. A., Bisanz, J., & Mrkonjic, L. (1998). Cognitive arithmetic evidence for obligatory activation of arithmetic facts. *Memory & Cognition*, 16, 45-53.

Macaruso, P., McCloskey, M., & Alimosa, D. (1993). The functional architecture of the cognitive numerical processing system: evidence from a patient with multiple impairments. *Cognitive Neuropsychology*, 10, 341-376.

McCloskey, M. (1992). Cognitive mechanism in numerical processing: evidence from acquired dyscalculia. *Cognition*, 44, 107-147.

McCloskey, M., Caramazza, A., & Basili, A. (1985). Cognitive mechanism in number processing and calculation: evidence from dyscalculia. *Brain and Cognition*, 4, 171-196.

Mc Closkey, M., Sokol, S. M., & Goodman, R. A. (1986). Cognitive processes in verbal-number production: inferences from the performance of brain-damaged subjects. *Journal of Experimental Psychology: General*, 115, 307-330.

Ashcraft, M. H. (1995). Cognitive psychology and simple arithmetic: a review and summary of new directions. *Mathematical Cognition*, 1, 3-34.
Ashcraft, M. H., & Battaglia, J. (1978). Cognitive arithmetic: Evidence for retrieval and decision in processes in mental addition. *Journal of Experimental Psychology: Human Learning and Memory*, 4, 527-538.
Ashcraft, M. H., & Christy, K. S. (1995). The frequency of arithmetic facts in elementary texts: addition and multiplication in grades 1-6. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 396-421.
Ashcraft, M. H., & Faust, M. W. (1994). Mathematics anxiety and mental arithmetic: an exploratory investigation. *Cognition and emotion*, 8, 97-125.
Butterworth, B. (1999). *Intelligenza matematica*, Milano, Rizzoli.
Butterworth, B., & Cipolotti, L. (1995). Toward a multiroute model of number processing: impaired number trascoding with preserved calculation skills. *Journal of Experimental Psychology: General*, 124 (4), 375-390.
Butterworth, B., Cipolotti, L., & Warrington, B. K. (1996). Short-memory impairments and arithmetical ability. *Quarterly Journal of Experimental psychology*, 49A, 251-262.
Butterworth, B., Sciama, S. C., & Semenza, C. (1999). Repetition priming in simple addition depends on surface form and typicality. *Memory & Cognition*, 27 (1), 116-127.
Campbell J. I. D. (1995). Mechanism of simple addition and multiplication: a modified network interference theory and simulation. *Mathematical Cognition*, 19, 208-252.
Campbell, J. I. D., & Clark, J. M. (1998). An encoding-complex view of cognitive number processing: comment on McCloskey, Sokol and Goodman. *Journal of Experimental Psychology: General*, 117, 204-214.
Campbell, J. I. D., & Graham, D. J. (1985). Mental multiplication skill: structure, process, and acquisition. *Canadian Journal of Psychology*, 39, 338-366.
Cipolotti, L. (1993). *Acquired Disorders of Numerical Processing*. Dissertazione di dottorato non pubblicata. University College of London, London, England.
Cipolotti, L. (1995). Multiple routes for reading words, why not numbers? Evidence from a case of arabic numeral dyslexia. *Cognitive Neuropsychology*, 12, 313-362.
Cohen, L., & Dehaene, S. (1991). Neglet dyslexia for number? *Cognitive Neuropsychology*, 8, 39-58.
Cubelli, R., & Biancardi, A. (1999). I meccanismi cognitivi del contare all'indietro. Analisi degli errori nella dislessia evolutiva. *Giornale Italiano di Psicologia*, 1, 83-95.
Cubelli, R., & Borghi, E. (1997). Studio neuropsicologico di un paziente con deficit selettivo della scrittura dei numeri in cifre. Manoscritto non pubblicato.
Cummings, J. J., & Elkins J. (1999). Lack of automaticity in the basic addition facts as a characteristic of arithmetic learning problems and instructional needs. *Mathematical Cognition*, 5 (2), 149-180.
Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition*, 44, 1-42.
Dehaene, S. (1997). *The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics*. New York: Oxford University Press.
Dehaene, S., & Changeux, J. P. (1993). Development of elementary numerical abilities. A neuronal model. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 5, 390-407.
Dehaene, S., & Cohen, L. (1991). Two mental calculation systems: a case of study of severe acalculia with preserved approximation. *Neuropsychologia*, 29, 1045-1047.
Deloche, G, & Seron, X. (1982). From one to 1: an analysis of a trascoding process by means of neuropsychological data. *Cognition*, 119, 149.
Deloche, G., & Seron, X. (1987). Numerical transcoding: A general production model. In G. Deloche & X. Seron (Eds), *Mathematical Disabilities: A Cognitive Neuro-psychological Perspective*

McCloskey, M., Sokol, S. M., Goodman-Schulman, R. A., & Caramazza, A. (1990). Cognitive representations and processes in number production: evidence from cases of acquired dyscalculia. In A. Caramazza (Ed), *Advances in cognitive neuropsychology and neurolinguistics* (pp.1-32). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Miller, K. F., Perlmutter, M., & Keating, D. (1984). Cognitive arirhmetic: comparition of operations. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 10, 46-60.

McShane, J. (1994). *Lo sviluppo cognitivo,* Bologna, Il Mulino.

Ostad, S. A. (1998). Developmental differences in solving simple arithmetic word problems and simple number-fact problems: a comparison of mathematically normal and mathematically disabled children. *Mathematical Cognition*, 4 (1), 1-19.

Piaget, J. (1952). *The Child's Conception of Number*. New York: Norton.

Resnick, L. B. (1986). The development of mathematical intuition. In M. Perlmutter (a cura di), *Minnesota Symposia on Child Psychology, Vol. 19: Perspectives on Intellectual Development*. Hillsldale, NJ: Erlbaum.

Shalew, R. S., Manor, O., & Gross-Tsur,V. (1996). Developmental dyscalculia: prevalence and demographic features, *Developmental Medicine and Child Neurology*, 38 (1), 25-33.

Shalew, R. S., Manor, O., Amir, N., & Gross-Tsur, V. (1993). The acquisition of arithmetic in normal children: assessment by a cognitive model of dyscalculia, *Developmental Medicine and Child Neurology*, 35, 593-601.

Shalew, R. S., Manor, O., Auerbach, J., & Gross-Tsur, V. (1998). Persistence of developmental dyscalculia: what counts? Results from a 3-years prospective follow-up study, *The Journal of Pediatrics*, 133 (3), 358-362.

Siegler, R. S., & Robinson, M. (1982). The development of numerical understandings. In H. W. Reese, & L. P. Lipsitt (Eds), Advances in *Child Development and Behaviour, Vol 16*. New York: Academic Press.

Sternberg, S. (1969). The discovery of processing stages. Exstensions of Donder's method. *Acta Psychologica*, 30, 276-315.

Stevenson, H. W., Lee, S. Y., Chen, C., Lummins, M., Stigler, J., Fan, L., & Ge, F. (1990a). Mathematics achievement of children in China and the United States. *Child Development*, 61, 1053-1066.

Stevenson H. W. & Stigler, J. W. (1992). *The learning gap: Why our schools are failing and* what *we can learn from Japanese and Chinese education*. New York: Summit Books.

Temple, C. M. (1994). The cognitive neuropsychology of the developmental dyscalculia. *Cahiers de Psychologie Cognitive/Current Psychology of Cognition*, 13, 351-370.

Widaman, K. F., Geary, D. C., Cormier, P., & Little, T. D. (1989). A componential model for mental addition. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 15, 898-919.

Wynn, K. (1992). Addition and subtraction by human infants. *Nature*, 358, 749-750.