

Il calcolo mentale. Studio della sottrazione in seconda e terza elementare

Elena Rasimelli e Giacomo Stella

Appare ormai indiscutibile l'importanza teorica rivestita dal ragionamento numerico per la comprensione della maturazione cognitiva. Si tratta, infatti, di un dominio che permette di evidenziare molti dei principali temi collegati allo sviluppo dell'elaborazione delle informazioni, della rappresentazione mentale e del pensiero logico.

Prendendo in esame le recenti ricerche che si sono occupate della cognizione aritmetica, risulta chiara «la mancanza, nonostante i notevoli progressi in quest'area, di un sostanziale accordo su un modello unitario in grado di spiegare i diversi fenomeni» (Passolunghi, 1996, p. 407).

Tuttavia, per inquadrare il contesto in cui si inserisce il presente contributo, si cercherà di effettuare una breve rassegna dei principali studi che si sono interessati in modo specifico al dominio delle sottrazioni mentali con operatori a una cifra.

Introduzione

Una delle prime ricerche pubblicate nel campo delle sottrazioni mentali è stata realizzata da Woods, Resnick e Groen (1975). Tale studio riguardava i processi utilizzati da bambini del secondo e quarto anno di scuola elementare nel risolvere problemi di sottrazione a una cifra del tipo $m-n$, dove m e n sono numeri interi compresi tra 0 e 9 ed m è maggiore o uguale a n . Attraverso l'analisi dei tempi di reazione, furono valutati cinque possibili modelli del processo di soluzione.¹ I risultati di questo esperimento mostrarono

¹ Il metodo impiegato da Woods et al. (1975) è un adattamento di quello che Groen e Parkman (1972) utilizzarono per indagare i processi coinvolti nella soluzione di semplici problemi di addizione.

che la maggior parte dei bambini di seconda e tutti quelli più grandi si trovavano meglio con un modello in cui il conteggio veniva effettuato verso il basso a partire dal minuendo oppure verso l'alto a partire dal sottraendo, a seconda della procedura che richiedeva il minor numero di passaggi. Inoltre, si riscontrò una diminuzione tra i due gruppi nel tempo necessario per ogni passaggio della procedura. Complessivamente, i risultati suggerivano un trend di sviluppo nel quale i bambini muovevano da un modello algoritmico fisso verso uno più euristico e flessibile, coinvolgente giudizio e valutazione.

Un secondo modello delle sottrazioni a una cifra è stato avanzato in uno studio condotto da Svenson e Hedenborg (1979) e costituisce un'elaborazione del modello di Woods et al. (1975). Secondo questa proposta, i bambini, prima di eseguire il calcolo, compiono una serie di prove specifiche, la cui successione viene riportata di seguito:

1. valutano se il minuendo e il sottraendo sono uguali, in tal caso forniscono come risultato 0;
2. controllano se il sottraendo è 0 e, eventualmente, danno una risposta corrispondente al valore del minuendo;
3. verificano se il primo termine è uguale al doppio del secondo, in questo caso la loro risposta corrisponde al valore del sottraendo;
4. provano a recuperare la risposta dalla memoria a lungo termine;
5. controllano se il minuendo è 10, in tal caso essi risolvono il problema velocemente (o attraverso il recupero del risultato dalla memoria o per mezzo di un processo computazionale non precisato);
6. determinano se il minuendo è maggiore di 10 e il sottraendo minore di 10: in questo caso contano sempre all'indietro a partire dal numero più grande;
7. alla fine, se nessuna delle procedure permette di trovare la risposta, i bambini utilizzano la strategia proposta da Woods et al. (1975).

Sebbene i due modelli descritti spieghino in maniera adeguata il tempo di risposta dei bambini, presentano il limite di aver basato gran parte delle deduzioni solamente su questa variabile, senza prendere in considerazione altri possibili parametri.

Più recentemente, Siegler (1987) ha elaborato un interessante contributo sulle strategie utilizzate dai bambini nell'esecuzione delle sottrazioni. Nella ricerca da lui condotta, furono videoregistrate le performance di bambini di 5 e 6 anni di età, ai quali venivano presentate semplici sottrazioni a una cifra. L'analisi dei filmati permise di individuare quattro strategie, corrispondenti a quelle osservate da Siegler e Shrager (1984) nel caso dell'addizione, che prevedevano: 1. il conteggio con le dita; 2. il conteggio ad alta voce senza l'uso di referenti esterni evidenti; 3. l'utilizzo delle dita senza conteggio; 4. il recupero del risultato dalla memoria.

In un ulteriore esperimento, ai bambini veniva richiesto di fornire la risposta esatta senza ricorrere a strategie palesi, quali l'uso delle dita o il conteggio, allo scopo di ottenere la stima più pura possibile delle *forze associative*² tra problemi di sottrazione

² Per forze associative, Siegler intende la percentuale di prove in cui i bambini forniscono una particolare risposta a un determinato problema (per esempio, una forza associativa di 0.87 tra il problema 2-1 e la risposta 1 significa che i bambini hanno risposto 1 a questo problema nell'87% delle prove).

e risposte. I risultati ottenuti hanno consentito a Siegler (1987) di elaborare un modello per rappresentare il processo di scelta della strategia nella sottrazione, dal quale risulta un evidente cambiamento di prospettiva. Per ogni operazione viene attivata una strategia preferenziale in base alla *distribuzione delle associazioni*: nel caso in cui le operazioni abbiano una distribuzione delle associazioni concentrata su una singola risposta, viene più facilmente adottata una strategia di recupero del risultato in memoria, mentre è più probabile che le operazioni con una distribuzione delle associazioni maggiormente diffusa siano eseguite per mezzo di una delle strategie di conteggio. Probabilmente, il maggior pregio di questo modello è quello di aver stabilito delle associazioni fra tre variabili: la percentuale di errori, il tempo di risposta medio e la percentuale di uso di strategie palesi in ogni problema.

Tenendo in considerazione gli studi menzionati, si è ritenuto opportuno effettuare un'indagine che integrasse i diversi approcci teorici emersi e che fornisse uno strumento utile a valutare il dominio della sottrazione nei suoi molteplici aspetti.

Ipotesi e scopo della ricerca

Lo scopo principale della presente ricerca è quello di studiare i tempi e le modalità di acquisizione della sottrazione. Si è cercato di fornire dei dati certi su cui basarsi nel tentativo, da una parte, di indicare strategie che rendano più funzionale l'insegnamento del calcolo numerico e, dall'altra, di individuare soggetti che mostrano particolari disabilità in questa area e di scoprire metodi idonei a colmare, per quanto possibile, le loro lacune.

Per ridurre i fattori in gioco nel vasto ambito aritmetico, in questo studio si è deciso di limitare il campo prendendo in considerazione il modo in cui bambini tra i 7 e i 9 anni, frequentanti la seconda o la terza classe della scuola elementare, risolvono mentalmente sottrazioni entro il dieci.³

In riferimento agli obiettivi sopra menzionati, si è ipotizzato che bambini di differenti classi della scuola elementare eseguano i compiti di calcolo mentale che vengono loro proposti con modalità sostanzialmente dissimili, sia per quanto riguarda il tempo impiegato per rispondere, sia per quanto concerne il tipo di strategia prevalentemente utilizzato. In particolare, si prevedeva che i soggetti più grandi avrebbero risposto più rapidamente di quelli più piccoli e che i bambini di seconda avrebbero utilizzato di meno strategie di tipo mnemonico, preferendo invece i processi di conteggio con le dita.

Inoltre, sono state vagliate ulteriori ipotesi riguardanti le possibili differenze tra maschi e femmine nell'esecuzione del compito.

³ La scelta di focalizzare l'indagine su operazioni semplici è stata dettata dalla considerazione che le strategie usate per risolvere problemi che includono numeri grandi sono probabilmente differenti da quelle impiegate nei problemi con numeri piccoli (Geary, 1996a). Sono state inoltre scartate dall'analisi le operazioni aventi il sottraendo uguale al minuendo (cioè aventi come risultato zero), in quanto è noto che nei calcoli di questo tipo si registrano tempi di reazione anomali.

O Sono state prese in considerazione non solamente le risposte corrette, ma anche la quantità di risposte omesse ed errate e la tipologia degli errori eventualmente commessi. Più specificamente, si è ipotizzato che i bambini più piccoli avrebbero commesso un maggior numero di errori e omissioni rispetto a quelli più grandi e che il tipo di errori sarebbe variato in funzione della classe frequentata.

Un'ultima serie di ipotesi è stata formulata riguardo all'influenza della grandezza del minuendo e del sottraendo sui tempi di risposta: le sottrazioni aventi termini di dimensione maggiore dovrebbero essere risolte più lentamente da tutti i soggetti, ma l'incidenza di tale fenomeno potrebbe risultare meno rilevante in quelli di terza.

Metodo

Soggetti

La ricerca è stata condotta su un campione di 100 bambini, di età compresa tra i 7 e i 9 anni, presso 3 diverse scuole elementari facenti parte del sesto circolo didattico del Comune di Perugia. I soggetti sono stati ripartiti in 2 gruppi, costituiti ciascuno da 50 bambini (di cui 25 maschi e 25 femmine), frequentanti rispettivamente la seconda e la terza classe.

Strumenti

Si è scelto di utilizzare uno strumento vocale per evitare eventuali interferenze con altre abilità, quali quelle di letto-scrittura, che sarebbero risultate difficilmente isolabili dalle specifiche capacità oggetto di studio.

Sono state inizialmente registrate su cd-rom 45 domande (tutte le possibili sottrazioni entro il 10, escluse quelle il cui risultato è zero) con una voce che risultasse chiara, uniforme e senza particolari disturbi fonetici. Il tempo intercorrente tra una domanda e l'altra è stato stabilito in seguito a uno studio pilota.

Durante la somministrazione della prova è stato utilizzato uno strumento accessorio, costituito da una griglia di rilevazione sulla quale venivano annotati il tipo di strategia impiegato per rispondere, basandosi sugli indizi visivi e sonori forniti dall'osservazione dei bambini, e il tipo di errore eventualmente commesso. A tale scopo è stato messo a punto un apposito sistema di codifica, che è mostrato nella figura 1.

Per l'individuazione delle strategie, si è fatto riferimento ai quattro tipi osservati da Siegler e Shrager (1984), a cui è stata aggiunta la categoria M, che richiama quella denominata *unobserved strategy* da Levine, Jordan e Huttenlocher (1992) e *decomposition* da Geary (2001).

– *La strategia di conteggio con le dita* (Cd) richiede di alzare le dita per rappresentare il numero più grande, mettere giù le dita corrispondenti al numero più piccolo (generalmente un dito alla volta, occasionalmente tutte insieme) e, infine, contare il numero delle dita che equivalgono alla differenza.

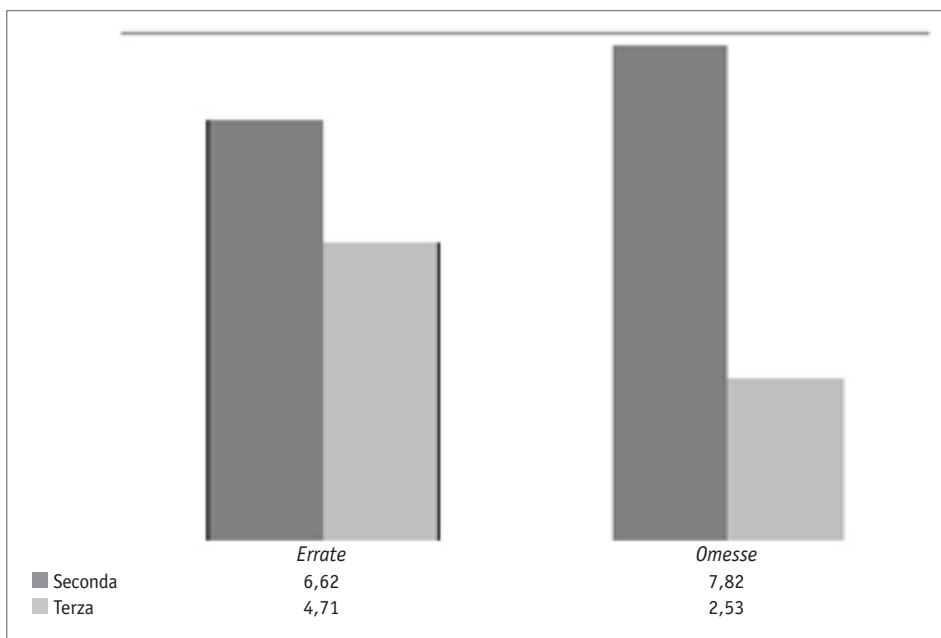


Fig. 1 Percentuali di errori e omissioni distinte per classi.

- *La strategia del conteggio (C)* è caratterizzata da comportamenti simili, eccetto il fatto che i bambini non usano le dita o altri referenti esterni; essi contano semplicemente ad alta voce.
- *La strategia delle dita (D)* comporta l'alzare le dita corrispondenti al minuendo, abbassare (tutte in una volta) quelle corrispondenti al sottraendo e poi fornire la risposta senza contare il numero delle dita rimanenti.
- *La strategia della scomposizione mentale (M)* si caratterizza per il fatto che i bambini riflettono, senza dare alcuna indicazione del conteggio e poi forniscono la risposta, dopo aver effettuato mentalmente dei passaggi utilizzando un algoritmo nascosto.
- *La strategia del recupero (R)*, infine, non coinvolge alcun tipo di conteggio palese né l'uso delle dita o di altri oggetti esterni; i bambini danno la risposta rapidamente (in un tempo minore o uguale a quello medio)⁴ in seguito alla presentazione della domanda, recuperando il risultato dalla memoria a lungo termine.

Quanto ai tipi di errori, ci si è basati sulle categorie individuate da Levine, Jordan e Huttenlocher (1992), aggiungendo il tipo Z e la distinzione tra Ge e Gd.

⁴ La decisione di distinguere le risposte di tipo M da quelle di tipo R in base al tempo di risposta è stata presa *post hoc*, allo scopo di utilizzare un criterio di rilevazione più oggettivo rispetto ai semplici indizi visivi e sonori.

- *Gli errori nella direzione sbagliata (S)* vengono individuati quando la risposta fornita è maggiore del minuendo; in questa categoria è compreso anche il caso in cui i due termini vengono sommati anziché sottratti (ad esempio $4-1 = 5$).
- *Gli errori nella direzione giusta* sono quelli caratterizzati da un risultato che, sebbene sbagliato, è più piccolo del minuendo, indicando che il soggetto che lo ha commesso ha comunque appreso i principi basilari della sottrazione. In questo studio si è fatta un'ulteriore distinzione tra gli *errori nella direzione giusta in eccesso (Ge)*, in cui la risposta errata è più grande di quella corretta, e *in difetto (Gd)*, in cui al contrario la risposta errata è inferiore rispetto a quella corretta. Tale discriminazione potrebbe rivelarsi utile a individuare la strategia di calcolo sottesa a questo tipo di errori.
- *Gli errori di ripetizione del primo termine (R1) o del secondo (R2)* si riferiscono a risposte sbagliate costituite rispettivamente dalla ripetizione del minuendo o del sottraendo. Tra i due la ripetizione del secondo termine riflette ovviamente una maggior conoscenza dei principi della sottrazione, in quanto è sicuramente nella direzione giusta e può anche costituire la risposta esatta (ad esempio $4-2 = 2$).
- *Gli errori di tipo zero (Z)*, infine, vengono identificati quando il soggetto fornisce erroneamente lo 0 come risposta a un quesito. Dato che le operazioni esaminate in questo studio non includono quelle aventi il sottraendo uguale al minuendo, se il soggetto risponde «zero» vuol dire che non ha ancora pienamente compreso il significato di questo numero o dei principi della sottrazione.

Procedura

I soggetti sono stati sottoposti individualmente alla prova, durante il mese di febbraio (circa a metà dell'anno scolastico).

A una presentazione generale del compito, fatta inizialmente a ciascun gruppo classe, è seguita una spiegazione più dettagliata fornita a ogni soggetto subito prima dell'inizio del test. Per evitare che l'ansia da prestazione interferisse con il compito, la prova è stata presentata sotto forma di gioco e si è spiegato ai bambini che in nessun caso gli insegnanti e i genitori sarebbero venuti a conoscenza del loro rendimento.

Il test vocale è stato somministrato utilizzando un lettore Cd che ha permesso di randomizzare le operazioni, in modo da rendere casuale la loro sequenza.

Le 45 sottrazioni sono state presentate in 5 sessioni costituite da 9 domande ciascuna; al termine di ogni gruppo di operazioni veniva concessa ai bambini una breve pausa (circa 2 minuti), evitando così un eccessivo affaticamento che avrebbe potuto compromettere la loro performance. Subito dopo ciascuna risposta sono stati annotati sulla griglia di rilevazione il tipo di strategia osservato o il tipo di errore commesso.

Risultati

Attraverso questo studio si è potuto constatare che, in genere, i bambini tra i 7 e i 9 anni eseguono con rapidità a mente sottrazioni con operatori a una cifra e con differenza

compresa tra 1 e 9. Infatti, il tempo medio di risposta (vedi tabella 1) per le seconde è di 3,18 secondi ($s = 0,76$) e per le terze 2,35 secondi ($s = 0,77$); la differenza tra le due classi, calcolata con il test t di Student per campioni indipendenti, è altamente significativa ($p < 0,0001$).

Il numero di errori compiuti è piuttosto esiguo e simile tra le 2 classi: su 2.250 risposte i bambini di seconda hanno commesso 149 errori (in media 2,98 per soggetto); quelli di terza 106 errori (in media 2,12 per soggetto). Anche il numero di omissioni delle risposte è abbastanza limitato, ma in questo caso è emersa una differenza evidentemente significativa tra le due classi: su 2.250 risposte, i bambini di seconda ne hanno omesse 176 (in media

Tabella 1
Sistema di codifica utilizzato per la rilevazione delle risposte

STRATEGIE	
Cd	Conteggio con le dita (il bambino conta apertamente con le dita)
D	Uso delle dita (guarda le sue dita senza contarle e dice la risposta)
C	Conteggio verbale (ad alta voce)
M	Scomposizione mentale (il bambino riflette, senza indicazioni del conteggio)
R	Recupero (la risposta è data velocemente, senza indicazioni del conteggio)
ERRORI	
S	Direzione sbagliata (es. $5-2 = 7$)
Ge	Eccesso nella direzione giusta (es. $5-2 = 4$)
Gd	Difetto nella direzione giusta (es. $5-2 = 1$)
R1	Ripetizione del primo termine (es. $5-2 = 5$)
R2	Ripetizione del secondo termine (es. $5-2 = 2$)
Z	Zero (es. $5-2 = 0$)
ALTRO	
O	Risposte omesse
E	Risposte errate
TR	Tempo di risposta

3,52 per soggetto), mentre quelli di terza 57 (in media 1,14 per soggetto). Le percentuali di errori e di omissioni per le due classi sono riportate nella figura 1.

Questi primi risultati suggeriscono che, sebbene tutti i soggetti esaminati siano in grado di eseguire adeguatamente le operazioni loro proposte, quelli più grandi e più avanti nel percorso scolastico le risolvono più velocemente e con un minor numero di omissioni. Appare dunque evidente che, nel corso di un solo anno, si verifica un notevole incremento della padronanza nella risoluzione mentale delle sottrazioni oggetto di questo studio.

Prendendo in considerazione i gruppi costituiti in base al sesso, si è riscontrata una differenza significativa tra i tempi medi di risposta che, per i bambini di seconda elementare, sono stati di 3,02 secondi per i maschi e 3,31 secondi per le femmine ($p < 0,05$). Tale differenza nella velocità di risposta è emersa anche tra i maschi e le femmine di terza: rispettivamente 2,14 e 2,53 secondi ($p < 0,05$). Tuttavia, valutando il numero di errori commessi (vedi figura 2), si è notata un'opposta tendenza: in seconda, su 1.125 risposte le femmine hanno commesso 51 errori (cioè il 4,53%) e i maschi 98 (8,71%), in terza rispettivamente 38 (3,38%) e 68 (6,04%).

Questi risultati sembrano indicare che i soggetti di sesso maschile sono più rapidi nel rispondere ma commettono diversi errori, mentre le femmine sono più caute e forniscono un maggior numero di risposte corrette. Le differenze riscontrate tra i due sessi costituiscono un punto importante della presente indagine, perché rappresentano una prova a favore dell'esistenza di geni in cui sono codificate le capacità numeriche (Geary, 1996a; Butterworth, 1999).

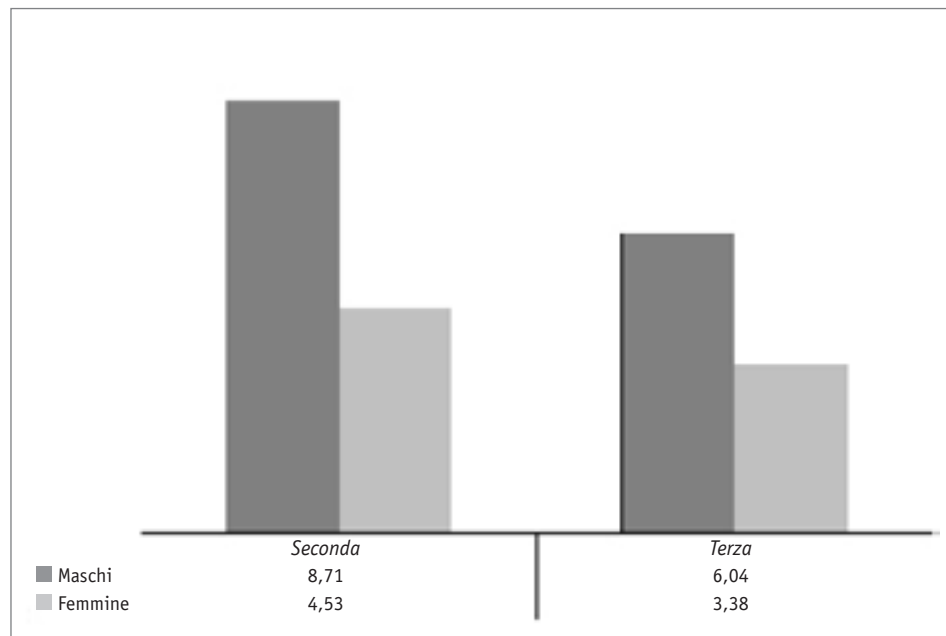


Fig. 2 Percentuali di errori in base alla classe e al sesso.

Per effettuare un'analisi più dettagliata, verranno ora esaminati i risultati ottenuti nelle diverse aree indagate (tipo di strategie, tipo di errori, livello di difficoltà e velocità di risposta in funzione della grandezza dei termini delle sottrazioni), tentando al contempo di fornirne — per quanto possibile — delle spiegazioni teoriche. La tabella 2 riporta una sintesi dei risultati per classi.

Tabella 2
Sintesi dei risultati per classi

	SECONDA	TERZA
<i>Indici</i>		
TR medi (in secondi)	3,18	2,35
Significatività	$p < 0,0001$	
Deviazione standard	0,76	0,77
Media di E per sogg.	2,98	2,12
Media di O per sogg.	3,52	1,14

Quali strategie?

Nonostante la notevole disomogeneità riscontrata tra i soggetti nell'uso prevalente di una strategia, si possono evidenziare delle linee di tendenza comuni. I singoli bambini tendono infatti a utilizzare diversi metodi di soluzione a seconda delle circostanze, anche se ognuno di loro ne ha uno privilegiato che impiega con maggior frequenza.

Già a partire dalla seconda elementare (vedi figura 3), il recupero del risultato dalla memoria a lungo termine è il tipo di strategia più diffuso (con una frequenza superiore al 40%), seguito dal conteggio con le dita (oltre il 32%) e dalla scomposizione mentale (15%). L'uso delle dita senza conteggio, un tipo di strategia che richiede la capacità da parte del soggetto di trasferire il codice numerico astratto in una configurazione visiva, viene utilizzato quasi nel 12% dei casi. Al conteggio verbale ha invece fatto ricorso solamente un soggetto di seconda (che lo ha impiegato per risolvere 13 sottrazioni); questa modalità di risoluzione è pertanto stata esclusa dall'analisi dei dati.

Nei bambini di terza, la prevalenza della strategia di recupero è apparsa ancora più evidente: viene infatti adottata in più del 67% dei casi. Al secondo posto si trova la scomposizione mentale (quasi il 13%), seguita dal conteggio con le dita (circa l'11%) e dall'uso delle dita senza conteggio (8%).

Se si considerano nel loro insieme le due categorie in cui è previsto il ricorso alle dita (Cd + D), emerge una forte differenza tra l'incidenza in seconda (oltre il 44% dei casi) e in terza (meno del 20%). Ciò sta a indicare che i soggetti più piccoli hanno ancora bisogno delle dita come supporto concreto esterno, nel processo di risoluzione delle sottrazioni.

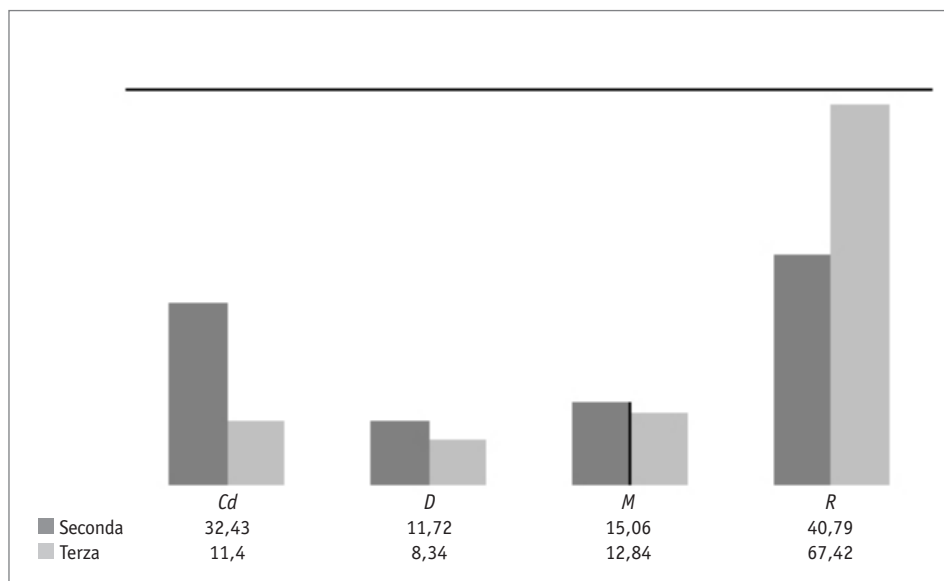


Fig. 3 Strategie utilizzate dai soggetti distinti per classi (val. %).

Questi risultati mostrano che si verifica un'evoluzione nel tipo di strategia utilizzato dai bambini per risolvere le sottrazioni mentali con operatori a una cifra. Il conteggio verbale, che nel campione considerato è apparso solamente in un soggetto, è probabilmente una modalità risolutiva poco evoluta, utilizzata da soggetti alle prime armi con il calcolo. Successivamente, pare che i bambini facciano maggiormente ricorso all'uso delle dita. Le strategie di tipo mnemonico, come il recupero del risultato dalla memoria e la scomposizione mentale, vengono invece privilegiate dai bambini più grandi ed esperti, i quali impiegano l'uso delle dita saltuariamente quando affrontano sottrazioni in cui si sentono meno sicuri.

Anche nella scelta della strategia sono emerse delle differenze tra i soggetti di sesso maschile e femminile all'interno di entrambi i gruppi classe. Le bambine, infatti, si affidano meno frequentemente alla modalità di recupero del risultato, favorendo invece l'impiego delle dita. Appare inoltre interessante osservare che la strategia di visualizzazione dei numeri attraverso le mani (D) è notevolmente più diffusa tra le femmine.

Che tipo di errori?

Si procederà ora a esaminare la frequenza di particolari tipi di errori, dal momento che questi possono riflettere una maggiore o minore conoscenza dei principi coinvolti nell'esecuzione delle sottrazioni. Ovviamente, in questa analisi non sono stati presi in considerazione i casi di omissione della risposta, poiché non forniscono chiare indicazioni

circa il grado di comprensione dei principi del calcolo da parte dei soggetti. Infatti, un bambino può non rispondere a un problema per varie ragioni correlate alla prestazione (ad esempio per disattenzione) piuttosto che alla competenza.

La figura 4 mostra le percentuali di errori commessi dai bambini nella direzione sbagliata (S), nella direzione giusta per eccesso (Ge) o per difetto (Gd), di ripetizione del primo termine (R1) o del secondo (R2) e quelli di tipo zero (Z). Come si può constatare, gli errori che si presentano con maggior frequenza in entrambe le classi sono quelli di tipo Ge e Gd. Complessivamente, i casi di errori commessi nella direzione giusta (Ge + Gd) costituiscono quasi l'80% del totale in seconda e oltre l'82% in terza. Questo sta a indicare che gli allievi delle classi considerate hanno già acquisito i principi di calcolo alla base della sottrazione, poiché nella maggior parte dei casi forniscono un risultato comunque inferiore rispetto al minuendo.

All'interno di questa categoria, gli errori in eccesso hanno una frequenza percentuale superiore a quelli in difetto per entrambi i gruppi classe. Occorre però notare che Ge è lievemente più diffuso in seconda (oltre il 54% del totale) che in terza (circa il 48%), mentre per quanto riguarda Gd si riscontra un'opposta tendenza, ossia è decisamente meno frequente in seconda (dove costituisce il 25,5%) che in terza (quasi il 34%). Ciò sta a indicare che, probabilmente, queste risposte non corrette sottendono l'impiego di differenti strategie e che il metodo di soluzione che porta a errori in difetto potrebbe essere più evoluto rispetto a quello che causa errori in eccesso.

Nel gruppo di bambini più piccoli, al secondo posto si collocano gli errori di tipo Z (quasi il 9%), seguiti da quelli di ripetizione di uno dei due termini, che complessivamente

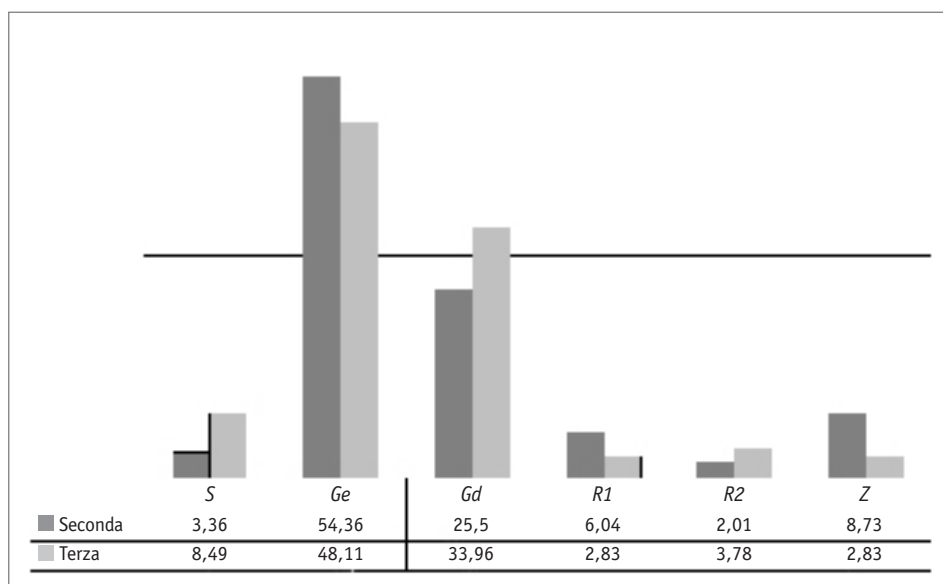


Fig. 4 Errori commessi dai soggetti distinti per classi (val. %).

(R1 + R2) costituiscono circa l'8%. Gli errori che si presentano meno frequentemente sono quelli nella direzione sbagliata (poco più del 3%).

In terza, la classifica delle frequenze dei tipi di errori commessi subisce delle variazioni: al secondo posto si trova la categoria S (circa l'8,5%), seguita ancora una volta da R1 + R2 (il 6,6% circa), mentre in ultima posizione si colloca Z (quasi il 3%).

La diminuzione di Z nei soggetti di terza sta a indicare una maggiore padronanza della sottrazione nei bambini più grandi e più avanti nel percorso formativo. Appare più complicato ricercare una causa per il dato relativo al notevole incremento degli errori nella direzione sbagliata in terza, il quale fa inevitabilmente pensare a un'involuzione. In realtà, la spiegazione potrebbe essere più semplice di quanto si immagini: infatti, la categoria S è costituita soprattutto da risposte fornite sommando i due termini ed è probabile che questi errori siano provocati da un'interferenza con l'addizione, piuttosto che da una scarsa comprensione delle regole di sottrazione. Ciò si verificherebbe maggiormente in terza perché a questo stadio il procedimento diviene più automatizzato e, quindi, sottoposto in misura minore a un controllo *top-down*.

Si osserva inoltre che, all'interno della categoria degli errori di ripetizione, mentre in seconda è tre volte più diffuso il tipo che implica la ripetizione del minuendo ($R1 > R2$), in terza si presenta con maggior frequenza quello costituito dalla ripetizione del sottraendo ($R1 < R2$). Dal momento che R2 è sicuramente meno grave di R1, questi risultati confermano l'aumento di padronanza negli allievi della classe superiore.

Per quanto concerne le differenze emerse in base al sesso, è opportuno ricordare che, in entrambi i gruppi classe, i maschi commettono quasi il doppio degli errori delle femmine. Partendo da questa considerazione, i dati più rilevanti per la seconda sono i seguenti: solo le bambine commettono errori nella direzione sbagliata (quasi il 10%); gli errori di tipo Z vengono effettuati quasi esclusivamente dai maschi (oltre il 12%); le risposte sbagliate fornite nella direzione giusta, e in particolare quelle in difetto, sono più frequenti nei maschi che nelle femmine, mentre l'insieme degli errori di ripetizione (R1 + R2) si presentano maggiormente tra le bambine.

Ciò che si evidenzia in terza è il livellamento delle percentuali di S e Z tra i due sessi e l'aumento di Gd compensato dalla diminuzione di Ge tra le femmine. Inoltre, gli errori di ripetizione, soprattutto quelli di tipo R2, continuano a presentarsi con maggior frequenza nel gruppo delle bambine.

Questi risultati avvalorano ulteriormente l'ipotesi di un differente uso delle strategie tra i soggetti di sesso opposto.

Quali sono le sottrazioni più difficili?

Se si considera il livello di difficoltà come somma delle risposte errate e omesse per ogni operazione, ovvero in funzione del grado di insuccesso nella soluzione degli item, risulta che in seconda, su 50 risposte, il livello di difficoltà medio degli item è 7,22 (con una deviazione standard pari a 4,93), mentre in terza è 3,62 ($s = 2,76$).

Per i bambini più piccoli (vedi figura 5a), le operazioni più difficili sono 9-6, in cui vengono commessi 10 errori e 12 omissioni (in totale il 44% delle risposte date in questa

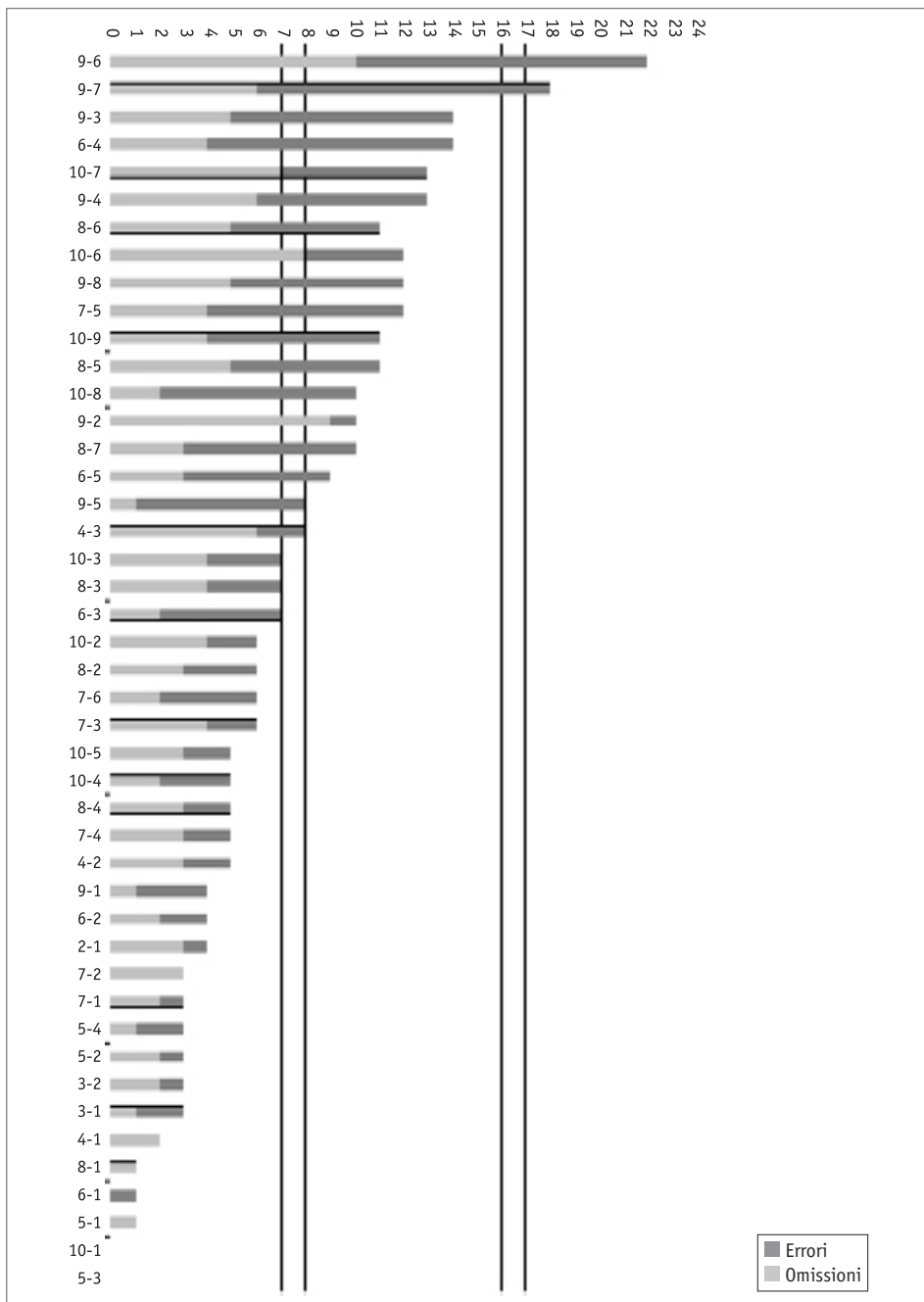


Fig. 5a Livello di difficoltà (in base al numero di errori e omissioni) delle sottrazioni per i bambini di seconda.

○ sottrazione non sono corrette), e 9-7, nella quale i bambini effettuano 6 errori e ancora 12 omissioni (fornendo in totale il 36% di risposte non corrette). Gli item che essi trovano più semplici sono 10-1 e 5-3, che ottengono esclusivamente risposte corrette. Risulta, inoltre, che le sottrazioni aventi come minuendo 9 hanno un livello di difficoltà superiore a quello medio (ad eccezione di 9-1), mentre le operazioni con sottraendo uguale a 1 hanno un livello di difficoltà nettamente inferiore a quello medio.

Per i soggetti di terza (vedi figura 5b), gli item più difficili sono di nuovo 9-7, dove si riscontrano 6 errori e 4 omissioni, e questa volta 8-5, in cui vengono commessi 7 errori e 3 omissioni (in entrambe i bambini forniscono il 20% di risposte non corrette). Le operazioni che vengono eseguite da tutti i soggetti in modo esatto sono molteplici: 10-1 (come per la seconda); 9-8; 8-1 (nella quale anche i bambini più piccoli hanno sbagliato solo una volta); 7-1; 6-5. Anche in questo gruppo mostrano un livello di difficoltà inferiore alla media le sottrazioni aventi sottraendo uguale a 1, a cui si aggiungono gran parte di quelle con differenza pari a 1.

Questi risultati forniscono delle indicazioni utili in ambito didattico, in quanto gli insegnanti potrebbero favorire l'apprendimento delle sottrazioni che risultano più difficili presentandole agli allievi con una maggiore frequenza.

Come influisce la grandezza dei termini sulla velocità di risposta?

Esaminando i tempi medi di risposta alle differenti sottrazioni (vedi figure 6a e 6b), appare evidente che, per entrambi i gruppi classe, i 10 item che fanno registrare i più bassi TR medi sono quelli aventi come sottraendo 1, ai quali si aggiunge 10-5, mentre quelli a cui i soggetti rispondono più lentamente sono: 9-6, 9-7 e 10-7. Questi risultati si accordano con quanto riscontrato riguardo al numero di errori e omissioni, confermando che le suddette sottrazioni hanno una diversa «forza di attivazione» (*Ashcraft*) e vengono quindi eseguite con strategie differenti.

Per quanto concerne la seconda elementare, se si considerano i tempi di risposta ottenuti mantenendo costante il minuendo, si evidenzia come, generalmente, il TR subisca un incremento all'aumentare del sottraendo. In particolare, si riscontrano in tutti i casi dei trend ascendenti con una lieve flessione verso il basso delle sottrazioni con minuendo superiore a 5 e una differenza minore o uguale a 2. Fa eccezione solo l'item 10-5, nel quale si registra un TR notevolmente inferiore. Raffrontando invece le operazioni con lo stesso risultato, è emerso che i tempi di risposta hanno un andamento crescente all'aumentare della grandezza dei 2 termini, anche se per le sottrazioni con risultato 1 questa tendenza è piuttosto lieve. Il trend presenta inoltre diversi picchi verso il basso, soprattutto in corrispondenza di 10-9, 10-8, 8-4 e, come al solito, 10-5.

Lo stesso tipo di analisi è stato effettuato per i soggetti di terza. Anche qui si verifica un generale incremento del tempo di risposta all'aumentare del sottraendo, ma in questo caso la flessione verso il basso si presenta a partire dagli item con minuendo maggiore di 4 e una differenza sempre minore o uguale a 2. Solo per le sottrazioni con minuendo pari a 10 l'andamento è piuttosto incostante. Si evidenziano inoltre dei picchi discendenti in

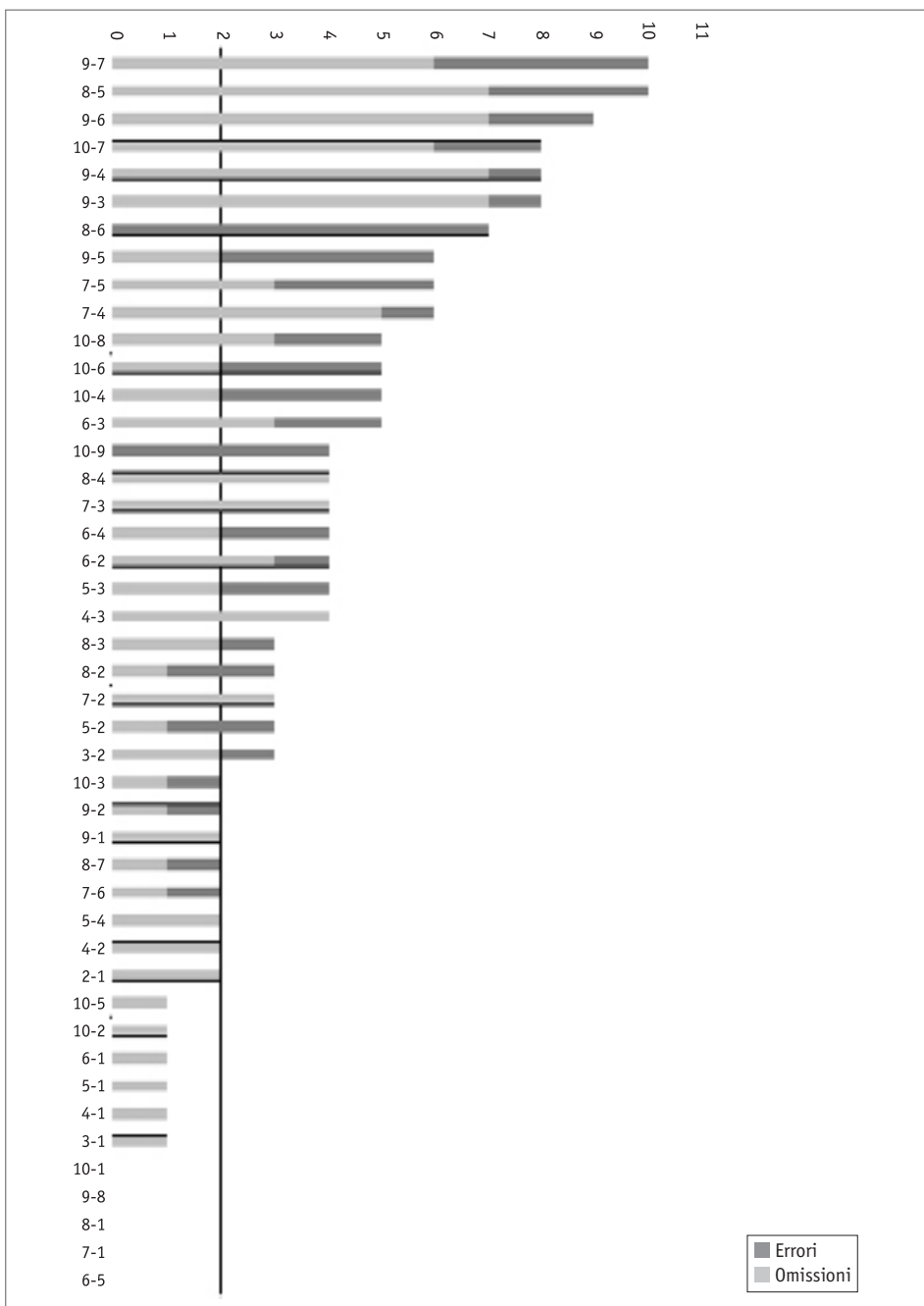


Fig. 5b Livello di difficoltà (in base al numero di errori e omissioni) delle sottrazioni per i bambini di terza.

0

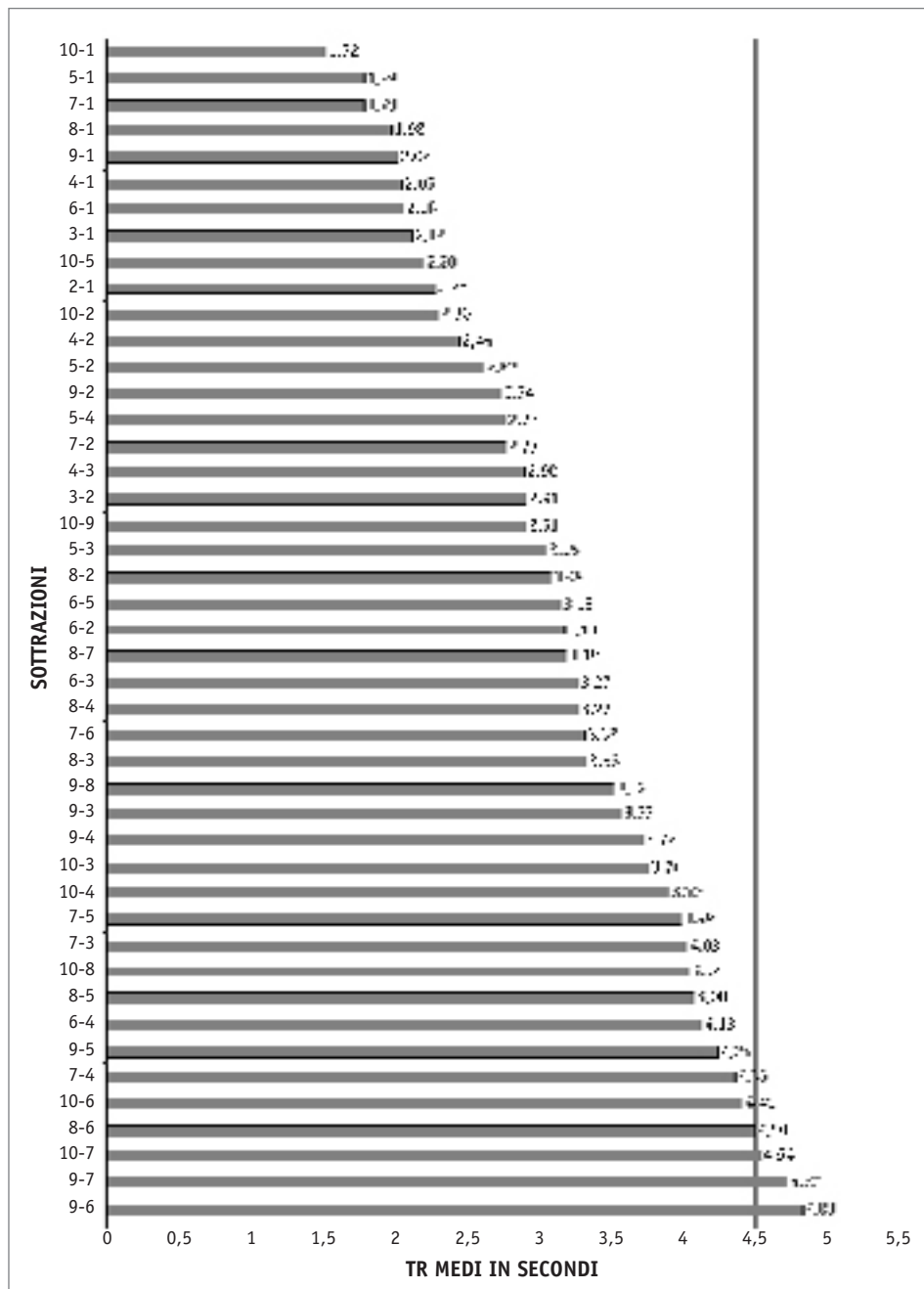


Fig. 6a Tempi medi di risposta dei soggetti di seconda.

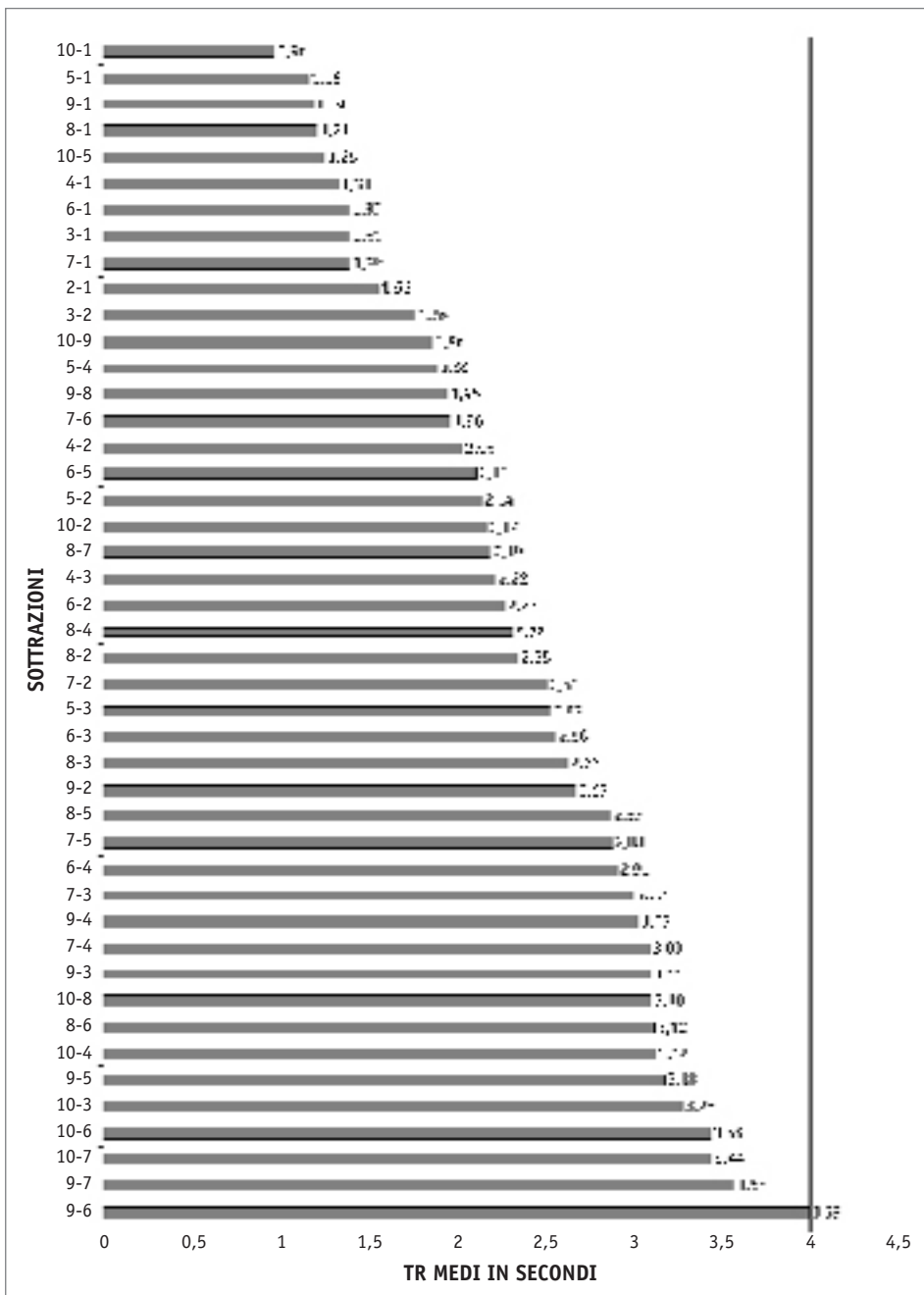


Fig. 6b Tempi medi di risposta dei soggetti di terza.

corrispondenza di 10-5 e 8-4. Per quanto riguarda l'analisi dei TR in funzione del risultato, si riscontra nuovamente un trend ascendente con l'aumentare della grandezza dei due termini, a esclusione degli item aventi risultato 1, i cui TR sono piuttosto bassi e omogenei tra loro. Inoltre, i picchi verso il basso sono più frequenti e si presentano soprattutto in corrispondenza di 10-5, 8-4, 10-8 e 10-7.

Questi risultati potrebbero essere spiegati assumendo che la rapidità con cui i bambini eseguono alcune sottrazioni, come 10-5, dipende dall'utilizzo di strategie di recupero del risultato dalla memoria. Per contro, le differenze dei tempi di risposta in funzione della grandezza del sottraendo potrebbero essere determinate dall'impiego di strategie ancora basate sul conteggio. A ogni modo, è evidente che i bambini di terza manifestano un maggior livellamento dei tempi di risposta. Ciò lascia supporre che questi soggetti abbiano acquisito una maggior padronanza nell'esecuzione degli item loro proposti.

Per valutare se i bambini utilizzano prevalentemente la strategia di conteggio verso l'alto o verso il basso, risulta a questo punto interessante confrontare le prestazioni dei soggetti in risposta a coppie di operazioni che, a parità di minuendo, presentano il sottraendo della prima uguale al risultato della seconda (ad esempio $10-9 = 1$ e $10-1 = 9$). Infatti, se il bambino impiegasse entrambi i tipi di strategia a seconda della situazione più conveniente, non si dovrebbero riscontrare delle differenze significative tra i TR ai due item considerati; al contrario, se il bambino utilizzasse sempre un tipo preferenziale di strategia di conteggio (verso l'alto o verso il basso), il tempo di risposta alle sottrazioni della coppia dovrebbe essere differente.

I dati relativi ai soggetti più giovani confermano l'utilizzo di una strategia preferenziale; infatti, in ben dieci coppie di operazioni si evidenziano differenze altamente significative ($p < 0,001$). Nelle restanti coppie, a esclusione di 4 (9-6 e 9-3; 9-5 e 9-4; 7-4 e 7-3; 5-3 e 5-2), le differenze risultano comunque significative, anche se in misura ridotta ($p < 0,05$). In sintesi, si riscontra che il livello di significatività cresce con l'aumentare della distanza tra i risultati delle sottrazioni accoppiate.

Nei bambini di terza, la situazione appare mutata. Infatti, ottengono una notevole significatività ($p < 0,001$) solamente le differenze all'interno delle coppie: 8-7 e 8-1; 4-3 e 4-1; mentre risultano non significative le differenze nei TR di ben 8 coppie di operazioni.

Questi risultati permettono di inferire che i bambini di seconda utilizzano un tipo di strategia di conteggio preferenziale, facendo poca attenzione alla valutazione dei contesti in cui una modalità di calcolo risulta più conveniente. Sembra però che questa ipotesi non sia applicabile ai soggetti di terza, i quali tra l'altro ricorrono principalmente a strategie di recupero immediato dalla memoria.

Conclusioni

Con il presente studio si è tentato di fornire dei riscontri empirici sulle modalità di acquisizione da parte dei bambini di quelle abilità, così importanti ma ancora poco indagate nel nostro Paese, che sono coinvolte nel calcolo mentale.

Le ipotesi iniziali hanno trovato sostanziali conferme. In particolare:

1. Nell'esecuzione di semplici sottrazioni, i soggetti di terza mostrano una maggiore competenza rispetto a quelli di seconda: sono più veloci, effettuano meno omissioni, utilizzano strategie più evolute e commettono errori di tipo diverso. Anche se in media il numero di errori è abbastanza simile, la percentuale di risposte esatte aumenta in terza elementare, in virtù della diminuzione delle omissioni.
2. I bambini più grandi ricorrono inoltre con maggior frequenza a strategie di recupero del risultato dalla memoria, mentre quelli di seconda si servono più spesso delle dita, sia per il conteggio che per la visualizzazione dei termini dell'operazione. Questa evoluzione nell'uso delle strategie si riflette sul tipo di errori commessi: generalmente in terza diminuiscono quelli più grossolani, come la ripetizione del primo termine. Tutto ciò sta a indicare che, nel corso di un solo anno scolastico, la padronanza nei compiti di sottrazioni mentali con operatori a una cifra aumenta notevolmente, grazie alla maturazione delle strutture cognitive e alla maggior esperienza nei problemi di calcolo.
3. La differenza di sesso ha un peso rilevante sull'acquisizione delle abilità aritmetiche considerate in questo studio. I maschi rispondono più rapidamente, mentre le femmine mostrano una maggior accuratezza nell'esecuzione degli item loro proposti (commettono cioè un numero più limitato di errori). Sono emerse delle diversità anche per quanto riguarda l'uso di strategie: le bambine si affidano meno frequentemente dei maschi alla modalità di recupero del risultato dalla memoria a lungo termine, privilegiando invece l'impiego delle dita. Questi risultati sembrerebbero rafforzare le teorie che sostengono l'origine biologica delle capacità numeriche.
4. Per quanto riguarda il rapporto fra la grandezza dei termini e la difficoltà delle sottrazioni (in funzione dell'accuratezza e della velocità di risposta), le relazioni non sono univoche. Ad esempio, l'item 10-1 viene risolto più rapidamente e accuratamente dell'item 2-1. Si possono comunque individuare delle linee di tendenza comuni. Le operazioni che fanno registrare i più bassi TR sono quelle aventi come sottraendo 1, mentre tra quelle a cui i soggetti rispondono più lentamente ne compaiono alcune con minuendo pari a 9 o 10.

Queste sottrazioni presentano un livello di difficoltà differente per i soggetti esaminati, in quanto generano un numero di risposte corrette significativamente diverso. La rapidità con cui i bambini eseguono alcune sottrazioni dipende probabilmente dall'utilizzo di strategie di recupero del risultato dalla memoria. Per contro, i tempi di risposta più lunghi potrebbero essere determinati dall'impiego di strategie ancora basate sul conteggio.

Anche se questa ricerca rappresenta solo un piccolo contributo agli studi effettuati nel campo della cognizione matematica, si spera che i risultati a cui si è giunti permettano di migliorare la conoscenza dello sviluppo delle capacità di calcolo mentale e costituiscano al tempo stesso un incentivo per successive ricerche in questo settore.

Bibliografia

- Butterworth B. (1999), *The Mathematical Brain*, London, Macmillan, trad. it. *Intelligenza matematica: vincere la paura dei numeri scoprendo le doti innate della mente*, Milano, Rizzoli, 1999.
- Geary D.C. (1996a), The problem size effect in mental addition: Developmental cross-national trends, «Mathematical Cognition», vol. 2, n. 1, pp. 63-93.
- Geary D.C. (1996b), *Sexual selection and sex differences in mathematical abilities*, «Behavioral and Brain Sciences», vol. 19, pp. 229 e seg.
- Geary D.C. (2001), *NIH Longitudinal Study: Codes for strategy assessment task*. Manoscritto non pubblicato.
- Groen G.J. e Parkman J.M. (1972), *A chronometric analysis of simple addition*, «Psychological Review», vol. 79, pp. 329-343.
- Levine S.H., Jordan N.C. e Huttenlocher J. (1992), *Development of calculation abilities in young children*, «Journal of Experimental Child Psychology», vol. 53, pp. 72-103.
- Passolunghi M.C. (1996), *Modelli cognitivi del calcolo mentale*, «Giornale italiano di psicologia», vol. 3, pp. 407-444.
- Siegler R.S. (1987), *Strategy choices in subtraction*. In J.A. Sloboda e D. Rogers (a cura di), *Cognitive processes in mathematics*, Oxford, Clarendon Press.
- Siegler R.S. e Shrager J. (1984), *Strategy choices in addition and subtraction: How do children know what to do?* In C. Sophian (a cura di), *The origins of cognitive skills*, Hillsdale, NJ, Erlbaum.
- Svenson O. e Hedenborg M. (1979), *Strategies used by children when solving simple subtractions*, «Acta Psychologica», vol. 43, pp. 477-489.
- Woods S.S., Resnick L.B. e Groen G.J. (1975), *An experimental test of five process models for subtraction*, «Journal of Educational Psychology», vol. 67, pp. 17-21.