

第九章 不等式与不等式组

到哪家商场购物更实惠?

$$50 + 0.95(x - 50) > 100 + 0.9(x - 100)$$





9.1 不等式

9.2 实际问题与 一元一次不等式

9.3 一元一次不等式组

9.4 课题学习 利用不 等关系分析比赛

数量有大小之分，它们之间有相等关系，也有不等关系。人们常常把要比较的对象数量化，再考虑它们的大小，这就是研究不等关系。例如，要比较全班同学的身高、体重、臂力，可以测得相关数据，通过这些数据可以判断哪个同学最高，哪个同学最重，哪个同学臂力最大。

数学中用不等式表示不等关系。例如， $2 + 3 > 1 + 3$; $2 \times (-3) < 1 \times (-3)$; 三角形的三条边 a , b , c 满足 $a + b > c$ 。

如同等式和方程是研究相等关系的数学工具一样，不等式是研究不等关系的数学工具。在研究许多问题时，人们经常要分析其中的不等关系，列出相应的不等式，并利用不等式求出某些数量的取值范围。

在这一章里，我们将从什么是不等式谈起，讨论不等式的性质，进而学习利用一元一次不等式和一元一次不等式组解决问题的一般方法。

9.1 不等式

9.1.1 不等式及其解集



问题 一辆匀速行驶的汽车在 11: 20 距离 A 地 50 千米, 要在 12: 00 之前驶过 A 地, 车速应满足什么条件?

分析: 设车速是 x 千米/时.

从时间上看, 汽车要在 12: 00 之前驶过 A 地, 则以这个速度行驶 50 千米所用的时间不到 $\frac{2}{3}$ 小时, 即

$$\frac{50}{x} < \frac{2}{3}. \quad ①$$

从路程上看, 汽车要在 12: 00 之前驶过 A 地, 则以这个速度行驶 $\frac{2}{3}$ 小时的路程要超过 50 千米, 即

$$\frac{2}{3}x > 50. \quad ②$$

式子①和②从不同角度表示了车速应满足的条件.

像①和②这样用 “ $<$ ” 或 “ $>$ ” 号表示大小关系的式子, 叫做**不等式** (inequality). 像 $a+2 \neq a-2$ 这样用 “ \neq ” 号表示不等关系的式子也是不等式.

有些不等式中不含未知数, 例如 $3 < 4$, $-1 > -2$. 有些不等式中含有未知数, 例如①和②式中字母 x 表示未知数.

虽然①和②式表示了车速应满足的条件, 但是我们希望更明确地得出 x 应取哪些值. 例如对不等式②, 当 $x=78$ 时, $\frac{2}{3}x > 50$; 当 $x=75$ 时, $\frac{2}{3}x = 50$; 当

$x=72$ 时, $\frac{2}{3}x < 50$. 这就是说, 当 x 取某些值 (如 78) 时, 不等式 $\frac{2}{3}x > 50$ 成立; 当 x 取某些值 (如 75, 72) 时, 不等式 $\frac{2}{3}x > 50$ 不成立. 与方程类似, 我们把使不等式成立的未知数的值叫做**不等式的解**. 例如 78 是不等式 $\frac{2}{3}x > 50$ 的解, 而 75 和 72 不是不等式 $\frac{2}{3}x > 50$ 的解.



思 考

判断下列数中哪些是不等式 $\frac{2}{3}x > 50$ 的解:

76, 73, 79, 80, 74.9, 75.1, 90, 60.

你还能找出这个不等式的其他解吗? 这个不等式有多少个解?

可以发现, 当 $x > 75$ 时, 不等式 $\frac{2}{3}x > 50$ 总成立; 而当 $x < 75$ 或 $x = 75$ 时, 不等式 $\frac{2}{3}x > 50$ 不成立. 这就是说, 任何一个大于 75 的数都是不等式 $\frac{2}{3}x > 50$ 的解, 这样的解有无数个. 因此, $x > 75$ 表示了能使不等式 $\frac{2}{3}x > 50$ 成立的 x 的取值范围, 叫做不等式 $\frac{2}{3}x > 50$ 的解的集合, 简称**解集** (solution set). 这个解集可以用数轴来表示 (图 9.1-1).

在表示 75 的点上画空心圆圈, 表示不包括这一点.



图 9.1-1

由不等式①能得出这个结果吗?

$\frac{50}{x} < \frac{2}{3}$ 中 x 在分母位置, 这个不等式不是一元一次不等式.

由上可知, 在前面问题中, 汽车要在 12: 00 之前驶过 A 地, 车速必须大于 75 千米/时.

一般地, 一个含有未知数的不等式的所有的解, 组成这个不等式的解集. 求不等式的解集的过程叫做解不等式.

类似于一元一次方程, 含有一个未知数, 未知数的次数是 1 的不等式, 叫做**一元一次不等式** (linear inequality of one unknown). 例如, $\frac{2}{3}x > 50$ 是一个一元一次不等式.

练习

1. 下列数值哪些是不等式 $x+3 > 6$ 的解? 哪些不是?

-4, -2.5, 0, 1, 2.5, 3, 3.2, 4.8, 8, 12.

2. 用不等式表示:

(1) a 是正数; (2) a 是负数;

(3) a 与 5 的和小于 7; (4) a 与 2 的差大于 -1;

(5) a 的 4 倍大于 8; (6) a 的一半小于 3.

3. 直接想出不等式的解集:

(1) $x+3 > 6$; (2) $2x < 8$; (3) $x-2 > 0$.

9.1.2 不等式的性质

对于某些简单的不等式, 我们可以直接想出它们的解集, 例如可以想出不等式 $x+3 > 6$ 的解集是 $x > 3$, 不等式 $2x < 8$ 的解集是 $x < 4$. 但是对于比较复杂的不等式, 例如 $\frac{5x+1}{6}-2 > \frac{x-5}{4}$, 直接想出解集就比较困难. 因此, 我们还要讨论怎样解不等式. 我们先来看看不等式有什么性质.

我们知道, 等式两边加或减去同一个数 (或式

子), 乘或除以同一个数 (除数不为 0), 结果仍相等. 不等式是否也有类似的性质呢?



观察

用“ $>$ ”或“ $<$ ”填空, 并总结其中的规律:

(1) $5 > 3$, $5+2 \underline{\quad} 3+2$, $5-2 \underline{\quad} 3-2$;

(2) $-1 < 3$, $-1+2 \underline{\quad} 3+2$,
 $-1-3 \underline{\quad} 3-3$;

(3) $6 > 2$, $6 \times 5 \underline{\quad} 2 \times 5$,
 $6 \times (-5) \underline{\quad} 2 \times (-5)$;

(4) $-2 < 3$, $(-2) \times 6 \underline{\quad} 3 \times 6$,
 $(-2) \times (-6) \underline{\quad} 3 \times (-6)$.

换一些其他的数, 验证这个发现.

怎样用式子表示这个性质?

根据发现的规律填空: 当不等式两边加或减去同一个数 (正数或负数) 时, 不等号的方向 _____. 当不等式两边乘同一个正数时, 不等号的方向 _____; 而乘同一个负数时, 不等号的方向 _____.

一般地, 不等式有以下性质.

不等式的性质 1 不等式两边加 (或减) 同一个数 (或式子), 不等号的方向不变.

如果 $a > b$, 那么 $a \pm c \underline{\quad} b \pm c$.

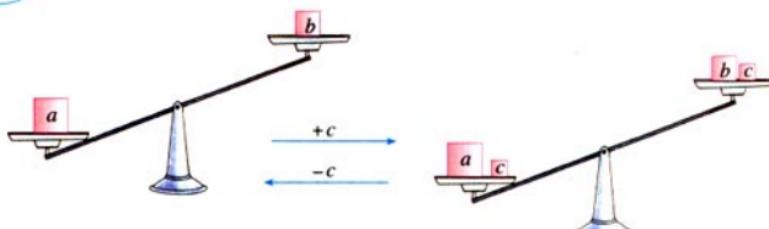


图 9.1-2

不等式的性质 2 不等式两边乘（或除以）同一个正数，不等号的方向不变。

怎样用式子表示这个性质？

如果 $a > b$, $c > 0$, 那么 $ac \quad bc$ (或 $\frac{a}{c} \quad \frac{b}{c}$).

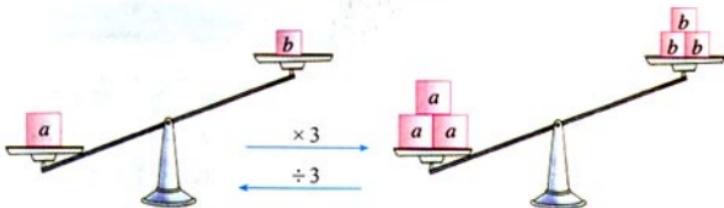


图 9.1-3

不等式的性质 3 不等式两边乘（或除以）同一个负数，不等号的方向改变。

例如, $3 > -3$, 而 $3 \times (-2) < (-3) \times (-2)$, 即 $-6 < 6$; $3 \div (-3) < (-3) \div (-3)$, 即 $-1 < 1$.

比较上面的性质 2 和性质 3, 指出它们有什么区别.

如果 $a > b$, $c < 0$, 那么 $ac \quad bc$ (或 $\frac{a}{c} \quad \frac{b}{c}$).

想一想，不等式的性质和等式的性质有什么相同之处，有什么不同之处。

例 1 利用不等式的性质解下列不等式：

- (1) $x - 7 > 26$; (2) $3x < 2x + 1$;
(3) $\frac{2}{3}x > 50$; (4) $-4x > 3$.

分析: 解未知数为 x 的不等式, 就是要使不等式逐步化为 $x > a$ 或 $x < a$ 的形式。

解: (1) 为了使不等式 $x - 7 > 26$ 中不等号的一边变为 x , 根据不等式的性质 1, 不等式两边都加 7, 不等号的方向不变, 得

$$\begin{aligned}x - 7 + 7 &> 26 + 7, \\x &> 33.\end{aligned}$$

这个不等式的解集在数轴上的表示如图 9.1-4.



图 9.1-4

(2) 为了使不等式 $3x < 2x + 1$ 中不等号的一边变为 x , 根据 _____, 不等式两边都减去 ___, 不等号的方向 ___, 得

$$3x - 2x < 2x + 1 - 2x,$$

$$x < 1.$$

这个不等式的解集在数轴上的表示如图 9.1-5.



图 9.1-5

可以看出, 上述(1)(2)的求解过程, 相当于由 $x - 7 > 26$ 得 $x > 26 + 7$, 由 $3x < 2x + 1$ 得 $3x - 2x < 1$. 这就是说, 解不等式时也可以“移项”, 即把不等式一边的某项变号后移到另一边, 而不改变不等号的方向.

这个不等式
在前面问题中出
现过.

(3) 为了使不等式 $\frac{2}{3}x > 50$ 中不等号的一边变为 x , 根据不等式的性质 2, 不等式两边都乘 $\frac{3}{2}$, 不等号的方向不变, 得

$$x > 75.$$

这个不等式的解集在数轴上的表示如图 9.1-6.



图 9.1-6

(4) 为了使不等式 $-4x > 3$ 中不等号的一边变为 x , 根据 _____, 不等式两边都除以 ___, 不等号的方向 ___, 得

$$x < -\frac{3}{4}.$$

这个不等式的解集在数轴上的表示如图 9.1-7.

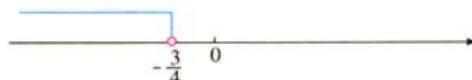


图 9.1-7

可以看出，上述（3）（4）的求解过程，类似于解方程中将方程两边都除以未知数的系数（未知数系数化为1），解不等式时要注意未知数系数的正负，以决定是否改变不等号的方向。

像 $a \geq b$ 或 $a \leq b$ 这样的式子，也经常用来表示两个数量的大小关系。例如，为了表示2003年5月18日北京的最低气温是 11°C ，最高气温是 27°C ，我们可以用 t 表示这天的气温， t 是随时间变化的，但是它有一定的变化范围，即 $t \geq 11^{\circ}\text{C}$ 并且 $t \leq 27^{\circ}\text{C}$ 。符号“ \geq ”读作“大于或等于”，也可说是“不小于”；符号“ \leq ”读作“小于或等于”，也可说是“不大于”。 $a \geq b$ 或 $a \leq b$ 形式的式子，具有与前面所说的不等式的性质类似的性质。

例2 某长方体形状的容器长5 cm，宽3 cm，高10 cm。容器内原有水的高度为3 cm，现准备向它继续注水。用 $V \text{ cm}^3$ 表示新注入水的体积，写出 V 的取值范围。

解：新注入水的体积 $V \text{ cm}^3$ 与原有水的体积的和不能超过容器的容积，即

$$V + 3 \times 5 \times 3 \leq 3 \times 5 \times 10,$$

$$V + 45 \leq 150,$$

$$V \leq 105.$$

又由于新注入水的体积 V 不是负数，因此， V 的取值范围是

$$V \geq 0 \text{ 并且 } V \leq 105.$$

在数轴上表示 V 的取值范围如图9.1-8。



图9.1-8

在表示0和105的点上画实心圆点，表示取值范围包括这两个数。

例3 三角形中任意两边之差与第三边有怎样的大小关系?

分析: 我们已知“三角形两边之和大于第三边”,利用不等式可以表示这种关系,然后再使不等式变形,得出三角形两边之差与第三边间的关系.

解: 如图 9.1-9, 设 a , b , c 为任意一个三角形的三条边的边长, 则

$$a+b>c, b+c>a, c+a>b.$$

由式子 $a+b>c$ 移项可得

$$a>c-b, b>c-a.$$

类似地, 由式子 $b+c>a$ 及 $c+a>b$ 移项可得

$$c>a-b, b>a-c \text{ 及 } c>b-a, a>b-c.$$

这就是说, **三角形中任意两边之差小于第三边.**

量出任意几个三角形的边长,
验证这个结论.

练习

1. 用不等式的基本性质解下列不等式, 并在数轴上表示解集:

(1) $x+5>-1$; (2) $4x<3x-5$;
(3) $\frac{1}{7}x<\frac{6}{7}$; (4) $-8x>10$.

2. 用不等式表示下列语句并写出解集:

- (1) x 的 3 倍大于或等于 1;
(2) x 与 3 的和不小于 6;
(3) y 与 1 的差不大于 0;
(4) y 的 $\frac{1}{4}$ 小于或等于 -2.

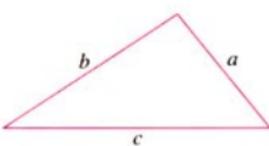


图 9.1-9

习题9.1

复习巩固

1. 下列数值中哪些是不等式 $2x+3>9$ 的解? 哪些不是?

-4, -2, 0, 3, 3.01, 4, 6, 100.

2. 用不等式表示:

(1) a 与 5 的和是正数;

(2) a 与 2 的差是负数;

(3) b 与 15 的和小于 27;

(4) b 与 12 的差大于 -5;

(5) c 的 4 倍大于或等于 8;

(6) c 的一半小于或等于 3;

(7) d 与 e 的和不小于 0;

(8) d 与 e 的差不大于 -2.

3. 写出不等式的解集:

(1) $x+2>6$;

(2) $2x<10$;

(3) $x-2>0.1$;

(4) $-3x<10$.

4. 不等式有哪些性质? 用式子怎样表示它们?

5. 设 $m>n$, 用 " $<$ " 或 " $>$ " 填空:

(1) $m-5 \underline{\quad} n-5$;

(2) $m+4 \underline{\quad} n+4$;

(3) $6m \underline{\quad} 6n$;

(4) $-\frac{1}{3}m \underline{\quad} -\frac{1}{3}n$.

6. 利用不等式的性质解下列不等式, 并在数轴上表示解集:

(1) $x+3>-1$;

(2) $6x<5x-7$;

(3) $-\frac{1}{3}x<\frac{2}{3}$;

(4) $4x>-12$.

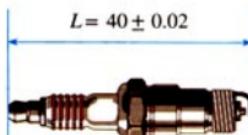
综合运用

7. 设 $a>b$, 用 " $<$ " 或 " $>$ " 填空:

(1) $2a-5 \underline{\quad} 2b-5$;

(2) $-3.5b+1 \underline{\quad} -3.5a+1$.

8. 根据机器零件的设计图纸(如图), 用不等式表示零件长度的合格尺寸(L 的取值范围).



(第 8 题)

9. 一罐饮料净重约 300 g, 罐上注有“蛋白质含量 $\geq 0.6\%$ ”, 其中蛋白质的含量为多少克?

10. 一部电梯最大负荷为 1 000 kg，有 12 人共携带 40 kg 的东西乘电梯，他们的平均体重 x 应满足什么条件？
11. 有一个两位数，如果把它的个位数字 a 和十位数字 b 对调，那么什么情况下得到的两位数比原来的两位数大？什么情况下得到的两位数比原来的两位数小？什么情况下得到的两位数等于原来的两位数？

拓广探索 ▶▶

12. 一件由黄金与白银制成的首饰重 a 克，商家称其中黄金含量不低于 90%，黄金与白银的密度分别是 19.3 g/cm^3 与 10.5 g/cm^3 ，列出不等式表示这件首饰的体积应满足什么条件。
(提示：质量 = 密度 \times 体积。)
13. 长跑比赛中，张华跑在前面，在离终点 100 m 时他以 4 m/s 的速度向终点冲刺，在他身后 10 m 的李明需以多快的速度同时开始冲刺，才能够在张华之前到达终点？



阅读与思考

选学

用求差法比较大小

制作某产品有两种用料方案，方案 1 用 4 张 A 型钢板，8 张 B 型钢板；方案 2 用 3 张 A 型钢板，9 张 B 型钢板。A 型钢板的面积比 B 型钢板大。从省料角度考虑，应选哪种方案？

设 A 型钢板和 B 型钢板的面积分别为 x 和 y 。于是，两种方案用料面积分别为
 $4x+8y$ 和 $3x+9y$ 。

现在需要比较上面两个数量的大小。

两个数量的大小可以通过它们的差来判断。如果两个数 a 和 b 比较大小，那么当 $a > b$ 时，一定有 $a - b > 0$ ；

当 $a = b$ 时，一定有 $a - b = 0$ ；

当 $a < b$ 时，一定有 $a - b < 0$ 。

反过来也对，即

当 $a-b > 0$ 时，一定有 $a > b$ ；

当 $a-b=0$ 时，一定有 $a=b$ ；

当 $a-b < 0$ 时，一定有 $a < b$ 。

因此，我们经常把两个要比较的对象先数量化，再求它们的差，根据差的正负判断对象的大小。

用求差的方法，你能回答前面的用料问题吗？

实际问题与一元一次不等式

有些实际问题中存在不等关系，用不等式来表示这样的关系可以为解决问题带来方便。

问题 甲、乙两商店以同样价格出售同样的商品，并且又各自推出不同的优惠方案：在甲店累计购买100元商品后，再购买的商品按原价的90%收费；在乙店累计购买50元商品后，再购买的商品按原价的95%收费。顾客怎样选择商店购物能获得更大优惠？

这个问题较复杂，从何处入手考虑它呢？

甲商店优惠方案的起点为购物款达_____元后；

乙商店优惠方案的起点为购物款达_____元后。

我们是否应分情况考虑？可以怎样分情况呢？

(1) 如果累计购物不超过50元，则在两店购物花费有区别吗？

(2) 如果累计购物超过50元而不超过100元，则在哪家商店购物花费小？为什么？

(3) 如果累计购物超过100元，那么在甲店购物花费小吗？

请你自己考虑(1)(2)两种情况。现讨论情况(3)。

设累计购物 x 元($x > 100$)，如果在甲店购物花费小，则

$$50 + 0.95(x - 50) > 100 + 0.9(x - 100).$$

怎样解这个不等式呢？你的解法是下面这样吗？

去括号，得

$$50 + 0.95x - 47.5 > 100 + 0.9x - 90.$$

移项且合并，得

$$0.05x > 7.5.$$

累计购物超过 100 元而不到 150 元时，在哪个店购物花费小？累计购物恰好 150 元，在哪家店购物花费小？

系数化为 1，得

$$x > 150.$$

这就是说，累计购物超过 ____ 元时在甲店购物花费小。

从上面可以看出，由实际问题中的不等关系列出不等式，就把实际问题转化为数学问题，通过解不等式可以得到实际问题的答案。



2008 年是
闰年，全年有
366 天。

讨 论

2002 年北京空气质量良好的天数是多少？用 x 表示 2008 年增加的空气质量良好的天数，则 2008 年北京空气质量良好的天数是多少？与 x 有关的哪个式子的值应超过 70%？这个式子表示什么？

解：设 2008 年空气质量良好的天数比 2002 年增加 x (天)。

2002 年有 365×0.55 天空气质量良好，2008 年有 $(x + 365 \times 0.55)$ 天空气质量良好，并且

$$\frac{x + 365 \times 0.55}{366} > 70\%.$$

去分母，得

$$x + 200.75 > 256.2.$$

移项，合并，得

比较解这个不等式与解方程
 $\frac{x + 365 \times 0.55}{366} = 70\%$
的步骤，两者有什么不同？

$$x > 55.45.$$

由 x 应为正整数, 得

$$x \geqslant 56.$$

答: 2008 年空气质量良好的天数至少要比 2002 年增加 56 (天), 才能使这一年空气质量良好的天数超过全年天数的 70%.

从上面的问题可以看出, 一元一次不等式的解法与一元一次方程类似, 只是不等式两边同乘 (或除以) 一个数时, 要注意不等号的方向.



例 2 某次知识竞赛共有 20 道题, 每一题答对得 10 分, 答错或不答都扣 5 分. 小明得分要超过 90 分, 他至少要答对多少道题?

解: 设小明答对 x 道题, 则他答错或不答的题数为 $20-x$. 根据他的得分要超过 90, 得

$$10x - 5(20-x) > 90.$$

解这个不等式, 得

$$10x - 100 + 5x > 90,$$

$$15x > 190,$$

$$x > 12\frac{2}{3}.$$

在本题中, x 应是 ____ 数而且不能超过 ___, 所以小明至少要答对 ___ 道题.

归纳

解一元一次方程, 要根据等式的性质, 将方程逐步化为 $x=a$ 的形式; 而解一元一次不等式, 则要根据不等式的性质, 将不等式逐步化为 $x < a$ (或 $x > a$) 的形式.

练习

1. 解下列不等式，并在数轴上表示解集：

$$(1) 5x+15 > 4x-1;$$

$$(2) 2(x+5) < 3(x-5);$$

$$(3) \frac{x-1}{7} < \frac{2x+5}{3};$$

$$(4) \frac{x+1}{6} < \frac{2x-5}{4} + 1.$$

2. 当 x 或 y 满足什么条件时，下列关系成立？

$$(1) 2(x+1) \text{ 大于或等于 } 1;$$

$$(2) 4x \text{ 与 } 7 \text{ 的和不小于 } 6;$$

$$(3) y \text{ 与 } 1 \text{ 的差不大于 } 2y \text{ 与 } 3 \text{ 的差};$$

$$(4) 3y \text{ 与 } 7 \text{ 的和的四分之一小于 } -2.$$

3. 某工程队计划在 10 天内修路 6 千米。施工前 2 天修完 1.2 千米后，计划发生变化，准备提前 2 天完成修路任务，以后几天内平均每天至少要修路多少千米？

习题 9.2

复习巩固

1. 解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来：

$$(1) 3(2x+5) > 2(4x+3);$$

$$(2) 10-4(x-4) \leqslant 2(x-1);$$

$$(3) \frac{x-3}{2} < \frac{2x-5}{3};$$

$$(4) \frac{2x-1}{3} \leqslant \frac{3x-4}{6};$$

$$(5) \frac{5x+1}{6} - 2 > \frac{x-5}{4};$$

$$(6) \frac{y+1}{6} - \frac{2y-5}{4} \geqslant 1.$$

2. a 取什么值时，式子 $\frac{4a+1}{6}$ 表示下列数？

(1) 正数；

(2) 小于 -2 的数；

(3) 0.

3. 根据下列条件求正整数 x ：

$$(1) x+2 < 6;$$

$$(2) 2x+5 < 10;$$

$$(3) \frac{x-3}{2} \geqslant \frac{2x-5}{3};$$

$$(4) \frac{2+x}{2} \geqslant \frac{2x-1}{3} - 2.$$

4. 总结解一元一次不等式的一般步骤，并与解一元一次方程进行比较。

综合运用



5. 某商店以每辆 250 元的进价购入 200 辆自行车，并以每辆 275 元的价格销售。两个月后自行车的销售款已超过这批自行车的进货款，这时至少已售出多少辆自行车？
6. 采石场爆破时，点燃导火线后工人要在爆破前转移到 400 米外的安全区域。导火线燃烧速度是 1 厘米/秒，工人转移的速度是 5 米/秒，导火线至少需要多长？
7. 某工厂前年有员工 280 人，去年经过结构改革减员 40 人，全厂年利润至少增加 100 万元，人均创利至少增加 6 000 元，前年全厂年利润是多少？
8. 苹果的进价是每千克 1.5 元，销售中估计有 5% 的苹果正常损耗。商家把售价至少定为多少，就能避免亏本？
9. 电脑公司销售一批计算机，第一个月以 5 500 元/台的价格售出 60 台，第二个月起降价，后以 5 000 元/台的价格将这批计算机全部售出，销售款总量超过 55 万元。这批计算机最少有多少台？



拓广探索



10. 求不等式 $5x - 1 > 3(x + 1)$ 与 $\frac{1}{2}x - 1 < 7 - \frac{3}{2}x$ 的解集的公共部分。
11. 当 x 满足什么条件时， $3x - 1$ 表示正偶数？



实验与探究

选学

水位升高还是降低

装有石头的小船浮在一个能容纳它的水槽里，水位离水槽上部还有一定距离，在水槽的边上画出水位线的标记；如果将石头全抛入水槽，水槽的水位会怎样变化呢？你可能想到“乌鸦喝水”的故事，认为由于石头沉入水槽底部，水槽的水位线会上升。

为检验你的想法，不妨设计一个小实验（图 1）。

实验结果可能令你出乎意料，抛出石头后水槽的水位不是上升，而是下降。让我们通过不等式来探究上述现象的原因。

早在古代希腊，著名科学家阿基米德就发现了浮力定律。由浮力定律可得，浮在水中的物体排开的水的质量等于浮体的质量。设小船重为 G_1 ，石头重为 G_2 ，当石头装在船里浮在水槽中时，排开的水的质量等于 $G_1 + G_2$ 。因为水的密度是1，所以排开的水的体积为 $V_1 = (G_1 + G_2) \div 1 = G_1 + G_2$ 。

当石头从船里抛入水槽时，浮体只有小船，它排开的水的体积等于 G_1 ；沉入水底的石头排开的水的体积等于石头的体积 $\frac{G_2}{\rho}$ （ ρ 是石头的密度）。因此，排开的水的总体积为 $V_2 = G_1 + \frac{G_2}{\rho}$ 。

比较上面两式，因为石头的密度 $\rho > 1$ ，所以 $G_2 > \frac{G_2}{\rho}$ ，进而 $G_1 + G_2 > G_1 + \frac{G_2}{\rho}$ ，于是 $V_1 > V_2$ 。这就说明，未抛石头时比抛出石头时排开的水的体积大。由此可知，未抛石头时比抛出石头时水槽的水位高。

在以上探究中，你看到不等式的作用了吗？

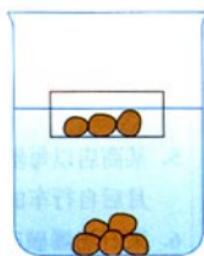


图1

9.3

一元一次不等式组

问题 现有两根木条 a 和 b , a 长10 cm, b 长3 cm. 如果要再找一根木条 c , 用这三根木条钉成一个三角形木框, 那么对木条 c 的长度有什么要求?

探究

用三根长度分别为14 cm, 9 cm, 6 cm的木条 c_1 , c_2 , c_3 分别试试, 其中哪根木条能与木条 a 和 b 一起钉成三角形木框?

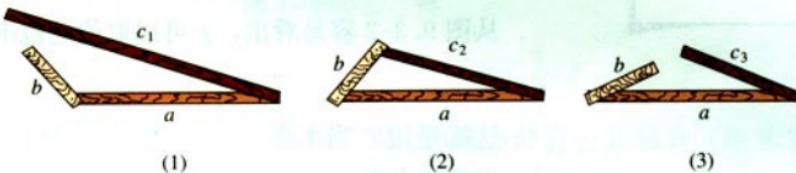


图 9.3-1

可以发现, 当木条 a 和 b 的长度确定后, 木条 c 太长或太短, 都不能与 a 和 b 一起钉成三角形.

由于“三角形中两边之和大于第三边, 两边之差小于第三边”, 设木条 c 长 x cm, 则 x 必须同时满足不等式

$$x < 10 + 3 \quad ①$$

和

$$x > 10 - 3. \quad ②$$

类似于方程组, 把这两个不等式合起来, 组成一个**一元一次不等式组** (linear inequalities of one unknown), 记作

$$\begin{cases} x < 10 + 3, \\ x > 10 - 3. \end{cases}$$

类比方程组的解，怎样确定不等式组中 x 的可取值的范围呢？

不等式组中的各不等式解集的公共部分，就是不等式组中 x 可以取值的范围.

由不等式①解得

$$x < 13.$$

由不等式②解得

$$x > 7.$$

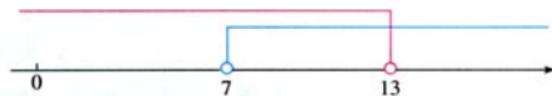


图 9.3-2

从图 9.3-2 容易看出， x 可以取值的范围为

$$7 < x < 13.$$

这就是说，当木条 c 比 7 cm 长并且比 13 cm 短时，它能与木条 a 和 b 一起钉成三角形木框.

一般地，几个不等式的解集的公共部分，叫做由它们所组成的不等式组的解集. 解不等式组就是求它的解集.

例 1 解下列不等式组：

$$(1) \begin{cases} 2x - 1 > x + 1, \\ x + 8 < 4x - 1; \end{cases} \quad \begin{array}{l} ① \\ ② \end{array}$$

$$(2) \begin{cases} 2x + 3 \geq x + 11, \\ \frac{2x+5}{3} - 1 < 2 - x. \end{cases} \quad \begin{array}{l} ① \\ ② \end{array}$$

解：(1) 解不等式①，得

$$x > 2.$$

解不等式②，得

利用数轴可以确定不等式组的解集.

$$x > 3.$$

把不等式①和②的解集在数轴上表示出来 (图 9.3-3).

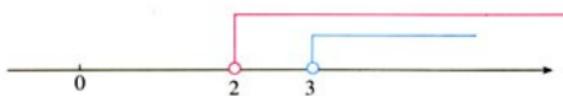


图 9.3-3

从图 9.3-3 可以找出两个不等式解集的公共部分, 得不等式组的解集

$$x > 3.$$

(2) 解不等式①, 得

$$x \geq 8.$$

解不等式②, 得

$$x < \frac{4}{5}.$$

这两个不等式的解集没有公共部分 (图 9.3-4), 不等式组无解.



图 9.3-4

当一个未知数量同时满足几个不等关系时, 可以按这些关系分别列几个不等式, 并由此得到不等式组.

例 2 3 个小组计划在 10 天内生产 500 件产品 (每天生产量相同), 按原先的生产速度, 不能完成任务; 如果每个小组每天比原先多生产 1 件产品, 就能提前完成任务. 每个小组原先每天生产多少件产品?

分析：“不能完成任务”的意思是：按原先的生产速度，10天的产品数量 $\underline{\quad}$ 500；“提前完成任务”的意思是：提高生产速度后，10天的产品数量 $\underline{\quad}$ 500.

解：设每个小组原先每天生产 x 件产品.

根据题中前后两个条件，得

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \times 10x < 500, \\ 3 \times 10(x+1) > 500. \end{array} \right. \quad ①$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \times 10x < 500, \\ 3 \times 10(x+1) > 500. \end{array} \right. \quad ②$$

由不等式①得

$$x < 16 \frac{2}{3}.$$

由不等式②得

$$x > 15 \frac{2}{3}.$$

因此，不等式组的解集为

$$15 \frac{2}{3} < x < 16 \frac{2}{3}.$$

根据题意， x 的值应是整数，所以

$$x = 16.$$

答：每个小组原先每天生产 16 件产品.

归 纳

对于具有多种不等关系的问题，可通过不等式组解决. 解一元一次不等式组时，一般先求出其中各不等式的解集，再求出这些解集的公共部分. 利用数轴可以直观地表示不等式组的解集.

练习

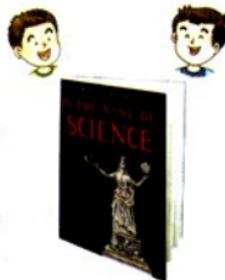
1. 解下列不等式组:

$$(1) \begin{cases} 2x > 1 - x, \\ x + 2 < 4x - 1; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x - 5 > 1 + 2x, \\ 3x + 2 < 4x; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \frac{2}{3}x + 5 > 1 - x, \\ x - 1 < \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}. \end{cases}$$

2. 一本英语书共 98 页, 张力读了一周(7 天)还没读完, 而李永不到一周就已读完. 李永平均每天比张力多读 3 页, 张力平均每天读多少页(答案取整数)?



习题 9.3

复习巩固



1. 解下列不等式组:

$$(1) \begin{cases} x - 1 < 3, \\ x + 1 < 3; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x - 1 > 3, \\ x + 1 > 3; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x - 1 < 3, \\ x + 1 > 3; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x - 1 > 3, \\ x + 1 < 3. \end{cases}$$

2. 解下列不等式组:

$$(1) \begin{cases} 2x - 1 > 0, \\ x + 1 < 3; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} -3x - 1 > 3, \\ 2x + 1 > 3; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 3(x - 1) + 13 > 5x - 2(5 - x), \\ 5 - (2x + 1) < 3 - 6x; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x - 3(x - 2) \geq 4, \\ \frac{1+2x}{3} > x - 1; \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} x-3(x-2) \geq 4, \\ \frac{2x-1}{5} > \frac{x+1}{2}; \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} \frac{1}{2}(x+4) < 2, \\ \frac{x+2}{2} > \frac{x+3}{3}. \end{cases}$$

3. 总结解一元一次不等式组的一般步骤，并与解一元一次不等式进行比较。

综合运用

4. 某商品的售价是 150 元，商家售出一件这种商品可获利润是进价的 10%~20%，进价的范围是什么（精确到 1 元）？
5. 用每分钟可抽 1.1 吨水的 A 型抽水机来抽池水，半小时可以抽完；如果用 B 型抽水机，估计 20 分到 22 分可以抽完。B 型抽水机比 A 型抽水机每分钟约多抽多少吨水？
6. 一种药品的说明书上写着：“每日用量 60~120 mg，分 3~4 次服用。”一次服用这种药的剂量在什么范围？



拓广探索

7. 你能求三个不等式 $5x-1 > 3(x+1)$, $\frac{1}{2}x-1 > 3-\frac{3}{2}x$, $x-1 < 3x+1$ 的解集的公共部分吗？
8. 当 x 是哪些整数时， $2 \leqslant 3x-7 < 8$ 成立？
9. 把一些书分给几个学生，如果每人分 3 本，那么余 8 本；如果前面的每个学生分 5 本，那么最后一人就分不到 3 本。这些书有多少本？学生有多少人？

9.4 课题学习 利用不等关系分析比赛

各种体育比赛不仅精彩纷呈，而且竞争激烈。参赛者的比赛成绩往往互相联系，此消彼长。对于比赛结果的分析，经常需要考虑问题中的不等关系，而这样的分析有时比解不等式更复杂，也更能锻炼逻辑思维能力。下面的问题就是这样的例子，同学们可以进行讨论，得出这些问题的答案，并合作完成后面的实践活动。

问题1 某射击运动员在一次比赛中前6次射击共中52环，如果他要打破89环（10次射击）的记录，第7次射击不能少于多少环？

设第7次射击的成绩为 x 环，由于最后三次射击最多共中30环，要破记录则需有

$$52+x+30>89,$$

$$x>89-52-30,$$

$$x>7.$$

这就是说，第7次射击不能少于8环才有可能破记录。

讨论：

(1) 如果第7次射击成绩为8环，最后三次射击中要有几次命中10环才能破记录？

(2) 如果第7次射击成绩为10环，最后三次射击中是否必须至少有一次命中10环才有可能破记录？

问题2 有A, B, C, D, E五个队分在同一小组进行单循环赛足球比赛，争夺出线权。比赛规则规定：



按积分多少排名次；积分相等的两队，净胜球数多的队名次在前；积分、净胜球数都相等的两队，进球数多的队名次在前。

分析这类问题时，经常使用逐一尝试的方法，去假存真，筛选需要的结果。

胜一场得 3 分，平一场得 1 分，负一场得 0 分，小组中名次在前的两个队出线。小组赛结束后，A 队的积分为 9 分。

讨论：

- (1) A 队的战绩是几胜几平几负？
- (2) 如果小组中有一个队的战绩为全胜，A 队能否出线？
- (3) 如果小组中有一个队的积分为 10，A 队能否出线？
- (4) 如果小组中积分最高的队积 9 分，A 队能否出线？

分析提示：各队都要进行 4 场比赛，并且甲对乙的比赛与乙对甲的比赛是同一场比赛，所以这个小组共要进行 _____ 场比赛。

每场结果分出胜负的比赛，胜队得 3 分，负队得 0 分，两队得分的和为 3 分；每场结果为平局的比赛，每队各得 1 分，两队得分的和为 2 分。

设 10 场比赛后各队积分总和为 n 分，则 n 满足
_____ $\leq n \leq$ _____.

- (1) 设 A 队积 9 分时胜 x 场，平 y 场，则

$$3x + y = \underline{\hspace{2cm}}$$

其中，非负整数 x ， y 满足不等式

$$x + y \leq \underline{\hspace{2cm}}$$

根据这些相等关系和不等关系，可以确定 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 和 $y = \underline{\hspace{2cm}}$ ，从而求出 A 队积 9 分时，它胜 _____ 平 _____ 负。

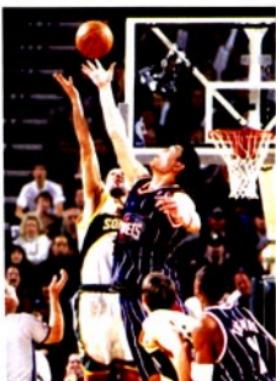
- (2) 如有一个队胜 4 场，则它积 12 分并且名次列小组第 _____。为分析问题方便，不妨设这个队为 B 队。A 队能否出线取决于 C，D，E 三队中是否有积分不少于 9 的队，分析这三队中任何一队的积分数 m 应满足的不等关系，得出 m 与 9 的大小比较，从而可以判断 A 队积 9 分时能否出线。

(3) 如有一个队（不妨设 B 队）积 10 分，进行类似于（1）的讨论，可知 B 队____胜____平。再分析 A, B 两队与其他队交锋的结果，得出其他三队中任何一队的积分数 m 应满足的不等关系，比较 m 的最大可能值与 9 的大小，从而可以判断 A 队能否出线。

(4) 如积分最高的队积 9 分，则积 9 分的队可能有_____个，当积 9 分的队_____时，A 队一定出线；当积 9 分的队_____时，A 队不一定出线。

请你完成对上述问题的分析解答。

如果 A 队积 10 分，它能出线吗？请你作出分析解答。



问题 3 某次篮球联赛中，火炬队与月亮队要争夺一个出线权。火炬队目前的战绩是 17 胜 13 负（其中有 1 场以 4 分之差负于月亮队），后面还要比赛 6 场（其中包括再与月亮队比赛 1 场）；月亮队目前的战绩是 15 胜 16 负，后面还要比赛 5 场。

讨论：（1）为确保出线，火炬队在后面的比赛中至少要胜多少场？

（2）如果火炬队在后面对月亮队 1 场比赛中至少胜月亮队 5 分，那么它在后面的其他比赛中至少胜几场就一定能出线？

（3）如果月亮队在后面的比赛中 3 胜（包括胜火炬队 1 场）2 负，那么火炬队在后面的比赛中至少要胜几场才能确保出线？

（4）如果火炬队在后面的比赛中 2 胜 4 负，未能出线，那么月亮队在后面的比赛中战果如何？

分析提示：（1）月亮队在后面的比赛中至多胜____场，所以整个比赛它至多胜_____场。

设火炬队在后面的比赛中胜 x 场，为确保火炬队出线，需有

$$\underline{\hspace{2cm}} > 20.$$

获胜场数多的队出线；两队获胜场数相等时，根据它们之间的比赛结果确定出线队。

由不等式可以得出火炬队在后面的比赛中至少胜几场才能确保出线.

想一想, 如果火炬队在后面的比赛中胜 3 场, 那么什么情况下它一定能出线?

请你完成对(1)的分析解答, 并对(2)(3)(4)作出分析解答.

实践活动: 结合某次实际的体育比赛, 运用数学知识预测比赛结果, 并写出简单的预测报告.



数学活动

活动1 生活水平调查

下表是反映居民家庭生活水平的恩格尔系数表.

家庭类型	贫困家庭	温饱家庭	小康家庭	富裕家庭	最富裕家庭
恩格尔系数 n	$0.60 < n$	$0.50 \leq n \leq 0.60$	$0.40 \leq n \leq 0.49$	$0.30 \leq n \leq 0.39$	$n < 0.30$

其中恩格尔系数

$$n = \frac{\text{家庭日常饮食开支}}{\text{家庭总支出}},$$

它被经济学家用来测量居民生活水平. 一般地说, 恩格尔系数越小, 生活水平越高.



(1) 了解某一家庭每月的饮食开支和总支出, 计算恩格尔系数, 看看这个家庭达到什么生活水平.

(2) 某户的恩格尔系数是 0.55, 如果随着收入的增加, 饮食开支也提高 10%, 那么要达到小康水平, 这家的总支出需增加百分之几?

活动 2 猜数游戏

小丽在 4 张同样的纸片上各写了一个正整数，从中随机抽取 2 张，并将它们上面的数相加。重复这样做，每次所得的和都是 5, 6, 7, 8 中的一个数，并且这 4 个数都能取到。猜猜看，小丽在 4 张纸片上各写了什么数。

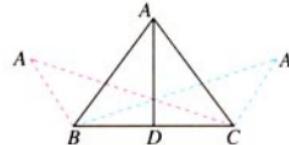


活动 3 用小试验求三角形面积的最大值

一个三角形的三条边为 a, b, c 。其中 $a=6\text{ cm}$, $b+c=10\text{ cm}$, 这个三角形面积的最大值是多少？

可以用以下的试验方法：

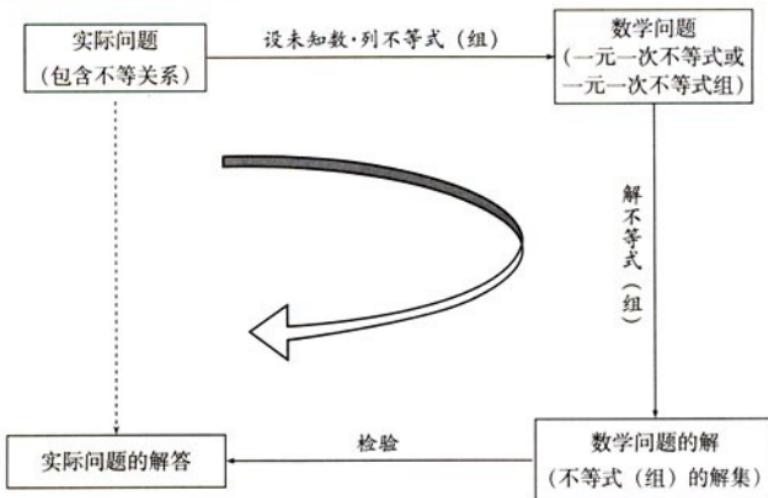
- 如图, (1) 把一根 16 cm 的细线结成一个环;
- (2) 把细线的 6 cm 长的一段拉直, 并固定这段线的两端 B, C ;
- (3) 在细线的另一部分上任取一点 A , 拉动点 A , 使细线围成 $\triangle ABC$;



- (4) 移动点 A 在细线上的位置, 观察 $\triangle ABC$ 的高 AD 何时最大, 量出这时 AD 的值, 并由此求出 $\triangle ABC$ 面积的最大值。

从这个试验, 你能看出什么规律?

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

- 总结不等式性质，并与等式性质进行比较。
- 总结一元一次不等式的解法，并与一元一次方程的解法进行比较。结合例子说明：解未知数为 x 的不等式，就是将不等式逐步变成 $x > a$ (或 $x < a$) 的形式。
- 如何解一元一次不等式组？结合例子说明：解不等式组就是求有关不等式的公共解集。
- 结合实例体会运用不等式解决实际问题的过程。

复习题9

复习巩固

1. 解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来：

(1) $3(2x+7) > 23$;

(2) $12 - 4(3x-1) \leq 2(2x-16)$;

(3) $\frac{x+3}{5} < \frac{2x-5}{3} - 1$;

(4) $\frac{2x-1}{3} - \frac{3x-1}{2} \geq \frac{5}{12}$.

2. a 取什么值时， $15 - 7a$ 的值满足下列条件？

- (1) 大于 1; (2) 小于 1; (3) 等于 1.

3. 解下列不等式组，并把它们的解集在数轴上表示出来：

(1) $\begin{cases} 2x+1 > -1, \\ 2x+1 < 3; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} -(x-1) > 3, \\ 2x+9 > 3; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3(x-1)+1 > 5x-2(1-x), \\ 5-(2x-1) < -6x; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} -3(x-2) \geq 4-x, \\ \frac{1+2x}{3} > x-1. \end{cases}$

4. $\frac{x+3}{5}$ 的值能否同时大于 $2x+3$ 和 $1-x$ 的值？说明理由。

5. 赵军说不等式 $a > 2a$ 永远不会成立，因为如果在这个不等式两边同除以 a ，就会出现 $1 > 2$ 这样的错误结论。他的说法对吗？

6. 解一元一次不等式组与解一元一次不等式有什么区别和联系？

综合运用

7. 一艘轮船从某江上游的 A 地匀速驶到下游的 B 地用了 10 小时，从 B 地匀速返回 A 地用了不到 12 小时，这段江水流速为 3 千米/时，轮船往返的静水速度 v 不变， v 满足什么条件？

8. 老张与老李购买了相同数量的种兔，一年后，老张养兔数比买入种兔数增加了 2 只，老李养兔数比买入种兔数的 2 倍少 1 只，老张养兔数不超过老李养兔数的 $\frac{2}{3}$ ，一年前老张至少买了多少只种兔？

拓广探索

9. 当 x 满足什么条件时， $2x-1$ 表示负奇数？

10. 三个连续正整数之和小于 333，这样的正整数有多少组？写出其中最大的一组。
11. 学校排球联赛中，有 4 个班级在同一组进行单循环赛，成绩排在最后的一个班被淘汰。如果排在最后的几个班的胜负场数相等，则他们之间再进行附加赛。初一（1）班在单循环赛中至少能胜 1 场，这个班是否可以确保在附加赛之前不被淘汰？是否一定能出线？为什么？