

义务教育课程标准实验教科书

# 数 学

九年级 上册

(复核本)

# 本册导引

亲爱的同学，九年级的学习开始了。

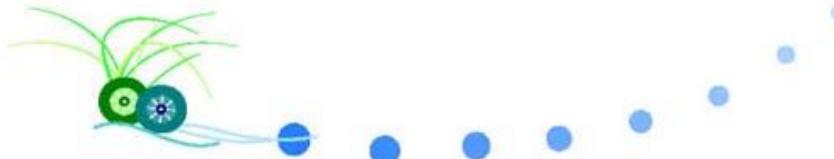
你将要学习的这本书是我们根据《全日制义务教育数学课程标准(实验稿)》编写的实验教科书，这是你在七~九年级要学习的六册数学教科书中的第五册。

与前四册一样，你将继续乘坐“观察”“思考”“探究”“讨论”“归纳”之舟，从身边实际问题出发，在数学的海洋里乘风破浪，去探索、发现数学的奥秘；你还要用学到的本领去解决“复习巩固”“综合运用”“拓广探索”等不同层次的问题；你可以有选择地进行“数学活动”；如果有兴趣，你也可以到“阅读与思考”“观察与猜想”“实验与探究”“信息技术应用”这些选学内容中去看看更广阔的数学世界。通过探索、尝试，相信你的聪明才智会得到充分的发挥，你用数学解决问题的能力会迈上一个新的台阶。

现在，让我们启航，一起去遨游九年级上册这片数学海域吧！

我们已经学过整式与分式，知道实际问题中的数量关系可以用式子表示。我们再来学习一类与数量关系有关的式子——二次根式。掌握“**二次根式**”的内容，我们就能够解决更多与数量关系有关的问题。

我们已经掌握了用一元一次方程、二元一次方程组解决一些实际问题的方法。在解决某些实际问题时还需要一种新方程——一元二次方程。怎样解这种方程，并运用这种方程解决一些实际问题呢？学了“**一元二次方程**”一章，你就会获得答案。



我们已经认识了平移、轴对称，探索了它们的性质，并运用它们进行图案设计。本书中图形变换又增添了一名新成员——旋转。学了“**旋转**”一章，我们对图形会有更深的认识，还可以综合运用平移、轴对称、旋转进行图案设计了，你设计出的图案会更加丰富多彩。

圆是一种常见的图形，在“**圆**”这一章，我们将进一步认识圆，探索它的性质，并用这些知识解决一些实际问题。通过这一章的学习，你的解决图形问题的能力将会进一步提高。

将一枚硬币抛掷一次，可能出现正面也可能出现反面，出现正面的可能性大还是出现反面的可能性大呢？它们会相等吗？学了“**概率初步**”一章，你就能更好地认识这个问题了。掌握了概率的初步知识，你还会解决更多的实际问题。

数学伴着我们成长、数学伴着我们进步、数学伴着我们成功，让我们一起随着这本书，畅游神奇、美妙的数学世界吧！



# 目 录

## 第二十章 二次根式 ..... 2

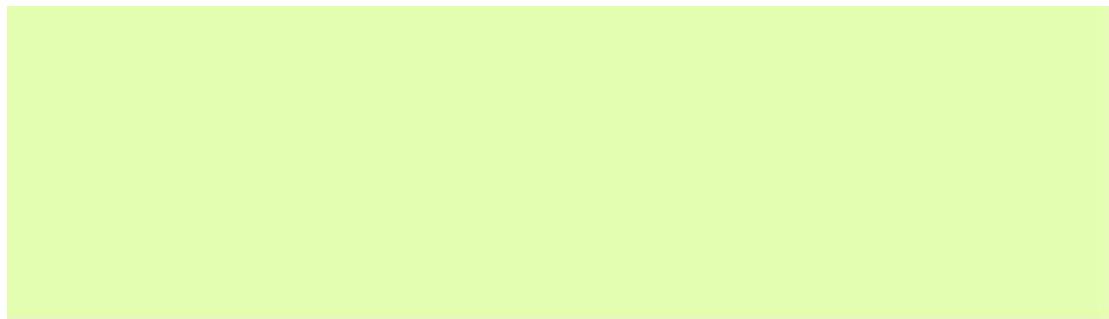


21.1 二次根式 .....	4
21.2 二次根式的乘除 .....	10
21.3 二次根式的加减 .....	17
阅读与思考	
海伦——秦九韶公式 .....	22
数学活动 .....	24
小结 .....	25
复习题 21 .....	26

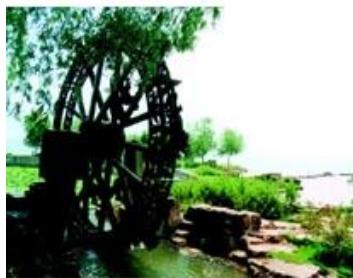
## 第二十二章 一元二次方程 ..... 28



22.1 一元二次方程 .....	30
22.2 降次——解一元二次方程 .....	35
阅读与思考	
黄金分割数 .....	46
22.3 实际问题与一元二次方程 .....	48
观察与猜想	
发现一元二次方程根与系数 的关系 .....	54
数学活动 .....	56
小结 .....	57
复习题 22 .....	58



## 第二十三章 旋 转 ..... 60

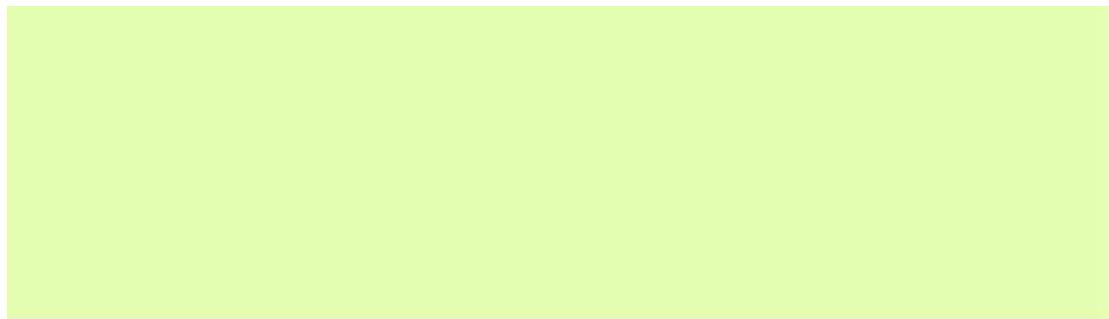


23.1 图形的旋转 .....	62
23.2 中心对称 .....	68
信息技术应用	
探索旋转的性质 .....	76
23.3 课题学习 图案设计 .....	77
数学活动 .....	78
小结 .....	79
复习题 23 .....	80

## 第二十四章 圆 ..... 82



24.1 圆 .....	84
24.2 与圆有关的位置关系 .....	97
24.3 正多边形和圆 .....	113
阅读与思考	
圆周率 $\pi$ .....	118
24.4 弧长和扇形面积 .....	120
实验与探究	
设计跑道 .....	126
数学活动 .....	127
小结 .....	129
复习题 24 .....	130



## 第二十五章 概率初步 ..... 134



25.1 概 率 .....	136
25.2 用列举法求概率 .....	146
 阅读与思考 概率与中奖 .....	156
25.3 利用频率估计概率 .....	157
 阅读与思考 布丰投针实验 .....	163
25.4 课题学习 键盘上字母的排列规律 .....	165
数学活动 .....	168
小结 .....	170
复习题 25 .....	171

## 部分中英文词汇索引 ..... 173

## 第二十一章 二次根式

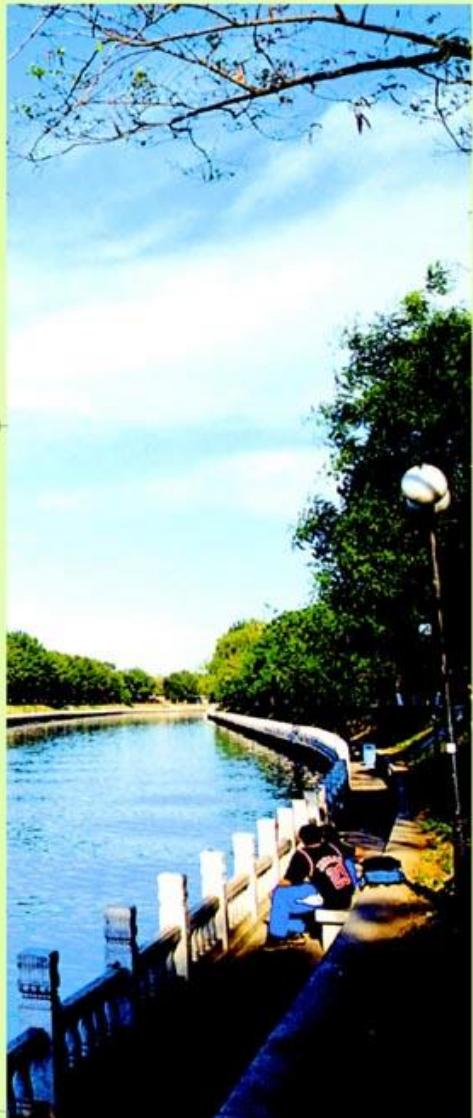


# 21

- 21.1 二次根式
- 21.2 二次根式的乘除
- 21.3 二次根式的加减

电视塔越高,从塔顶发射出的电磁波传播得越远,从而能收看到电视节目的区域就越广。如果电视塔高 $h$  km, 电视节目信号的传播半径为 $r$  km, 则它们之间存在近似关系  $r = \sqrt{2Rh}$ , 其中  $R$  是地球半径,  $R \approx 6400$  km。如果两个电视塔的高分别是 $h_1$  km,  $h_2$  km, 那么它们的传播半径的比为  $\frac{\sqrt{2Rh_1}}{\sqrt{2Rh_2}}$ , 你能将这个式子化简吗? 这要用到本章将要学习的二次根式的运算与化简。

如何进行二次根式的运算? 如何将二次根式化简? 这是本章所要研究的主要内容。通过本章学习可为后面一元二次方程等内容的学习打下基础。



## 21.1 二次根式



### 思 考

用带有根号的式子填空，看看写出的结果有什么特点：

- (1) 如图 21.1-1，要做一个两条直角边的长分别是 7 cm 和 4 cm 的三角尺，斜边的长应为 \_\_\_\_\_ cm；
- (2) 面积为  $S$  的正方形的边长为 \_\_\_\_\_；
- (3) 要修建一个面积为  $6.28 \text{ m}^2$  的圆形喷水池，它的半径为 \_\_\_\_\_ m ( $\pi$  取 3.14)；
- (4) 一个物体从高处自由落下，落到地面所用的时间  $t$  (单位：s) 与开始落下时的高度  $h$  (单位：m) 满足关系  $h=5t^2$ . 如果用含有  $h$  的式子表示  $t$ ，则  $t=$  \_\_\_\_\_.

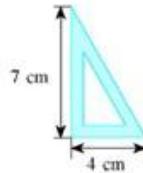


图 21.1-1

在上面的问题中，结果分别是  $\sqrt{65}$ ,  $\sqrt{S}$ ,  $\sqrt{2}$ ,

$\sqrt{\frac{h}{5}}$ ，它们都表示一些正数的算术平方根。

我们知道，一个正数有两个平方根；0 的平方根为 0；在实数范围内，负数没有平方根. 因此，开平方时，被开方数只能是正数和 0.

一般地，我们把形如  $\sqrt{a}$  ( $a \geq 0$ ) 的式子叫做**二次根式**，“ $\sqrt{\phantom{x}}$ ”称为**二次根号**.

**例1** 当  $x$  是怎样的实数时,  $\sqrt{x-2}$  在实数范围内有意义?

解: 由  $x-2 \geq 0$ , 得

$$x \geq 2.$$

当  $x \geq 2$  时,  $\sqrt{x-2}$  在实数范围内有意义.

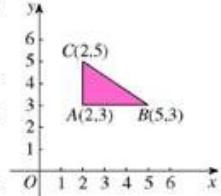


### 思考

当  $x$  是怎样的实数时,  $\sqrt{x^2}$  在实数范围内有意义?  $\sqrt{x^3}$  呢?

### 练习

1. 要画一个面积为  $18 \text{ cm}^2$  的矩形, 使它的边长之比为  $2:3$ , 它的边长应取多少?
2. 如图, 在平面直角坐标系中,  $A(2, 3)$ 、 $B(5, 3)$ 、 $C(2, 5)$  是三角形的三个顶点, 求  $BC$  的长.
3. 当  $a$  是怎样的实数时, 下列各式在实数范围内有意义?  
(1)  $\sqrt{a-1}$ ;      (2)  $\sqrt{2a+3}$ .



(第2题)

当  $a > 0$  时,  $\sqrt{a}$  表示  $a$  的算术平方根, 因此  $\sqrt{a} > 0$ ;

当  $a=0$  时,  $\sqrt{a}$  表示 0 的算术平方根, 因此  $\sqrt{a}=0$ . 这就是说,

$\sqrt{a}$  ( $a \geq 0$ ) 是一个非负数.



根据算术平方根的意义填空：

$$(\sqrt{4})^2 = \underline{\quad}; (\sqrt{2})^2 = \underline{\quad};$$

$$\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 = \underline{\quad}; (\sqrt{0})^2 = \underline{\quad}.$$

$\sqrt{4}$ 是4的算术平方根，根据算术平方根的意义，  
 $\sqrt{4}$ 是一个平方等于4的非负数。因此有 $(\sqrt{4})^2 = 4$ 。

同理， $\sqrt{2}$ ， $\sqrt{\frac{1}{3}}$ ，0分别是2， $\frac{1}{3}$ ，0的算术平方根，因此有 $(\sqrt{2})^2 = 2$ ， $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$ ， $(\sqrt{0})^2 = 0$ 。

一般地，

$$(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0).$$

**例2** 计算：

(1)  $(\sqrt{1.5})^2$ ; (2)  $(2\sqrt{5})^2$ .

解：(1)  $(\sqrt{1.5})^2 = 1.5$ ;

(2)  $(2\sqrt{5})^2 = 2^2 \times (\sqrt{5})^2 = 4 \times 5 = 20$ .

这里用到了 $(ab)^2 = a^2 b^2$ 这个结论。



填空：

$$\sqrt{2^2} = \underline{\quad}; \sqrt{0.1^2} = \underline{\quad};$$

$$\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \underline{\quad}; \sqrt{0^2} = \underline{\quad}.$$

可以得到

$$\sqrt{2^2} = 2, \sqrt{0.1^2} = 0.1, \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}, \sqrt{0^2} = 0.$$

一般地, 根据算术平方根的意义,

$$\boxed{\sqrt{a^2} = a (a \geq 0).}$$

**例 3** 化简:

(1)  $\sqrt{16};$  (2)  $\sqrt{(-5)^2}.$

解: (1)  $\sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4;$

(2)  $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{5^2} = 5.$

回顾我们学过的式子, 如  $5, a, a+b, ab, \frac{s}{t},$

$x^3, \sqrt{3}, \sqrt{a}$  ( $a \geq 0$ ), 它们都是用基本运算符号 (基本运算包括加、减、乘、除、乘方和开方) 把数和表示数的字母连接起来的式子, 我们称这样的式子为**代数式** (algebraic expression).

练习

1. 计算:

(1)  $(\sqrt{3})^2;$  (2)  $(3\sqrt{2})^2.$

2. 说出下列各式的值:

(1)  $\sqrt{0.3^2};$  (2)  $\sqrt{\left(-\frac{1}{7}\right)^2};$

(3)  $-\sqrt{(-\pi)^2};$  (4)  $\sqrt{10^{-2}}.$

## 习题21.1

### 复习巩固

1. 当  $a$  是怎样的实数时, 下列各式在实数范围内有意义?

(1)  $\sqrt{a+2}$ ; (2)  $\sqrt{3-a}$ ;  
(3)  $\sqrt{5a}$ ; (4)  $\sqrt{-a}$ .

2. 计算:

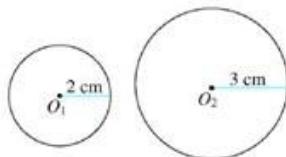
(1)  $(\sqrt{5})^2$ ; (2)  $(-\sqrt{0.2})^2$ ;  
(3)  $\sqrt{0.6^2}$ ; (4)  $\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}$ .

3. 用代数式表示:

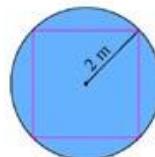
- (1) 面积为  $S$  的圆的半径;  
(2) 面积为  $S$  且两条邻边的比为  $2:3$  的矩形的边长.  
4. 已知直角三角形的两条直角边为  $a$  和  $b$ , 斜边为  $c$ .  
(1) 如果  $a=12$ ,  $b=5$ , 求  $c$ ;  
(2) 如果  $a=3$ ,  $c=4$ , 求  $b$ ;  
(3) 如果  $c=10$ ,  $b=9$ , 求  $a$ .

### 综合运用

5. 已知半径为  $r$  cm 的圆的面积是半径为 2 cm 和 3 cm 的两个圆的面积的和, 求  $r$  的值.



(第 5 题)

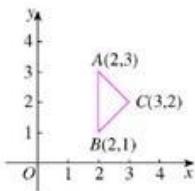


(第 6 题)

6. 要在一个半径为 2 m 的圆形钢板上, 截出一块面积最大的正方形, 正方形的边长是多少?

拓广探索 ►►

7. (1)  $\sqrt{18-n}$ 是整数, 求自然数  $n$  的值;  
(2)  $\sqrt{24n}$ 是整数, 求正整数  $n$  的最小值.
8. 如图, 在平面直角坐标系中,  $\triangle ABC$  的三个顶点的坐标分别是  $A(2, 3)$ 、 $B(2, 1)$ 、 $C(3, 2)$ .  
(1) 判断  $\triangle ABC$  的形状;  
(2) 如果将  $\triangle ABC$  沿着边  $AC$  旋转, 求所得旋转体的体积.



(第 8 题)

## 21.2 二次根式的乘除



1. 计算下列各式，观察计算结果，你发现什么规律？

(1)  $\sqrt{4} \times \sqrt{9} = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $\sqrt{4 \times 9} = \underline{\hspace{2cm}}$ ;

(2)  $\sqrt{16} \times \sqrt{25} = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $\sqrt{16 \times 25} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

2. 用你发现的规律填空，并用计算器进行验算。

(1)  $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \underline{\hspace{2cm}}\sqrt{6}$ ; (2)  $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \underline{\hspace{2cm}}\sqrt{10}$ .

一般地，对二次根式的乘法规定

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad (a \geq 0, b \geq 0).$$

例 1 计算：

(1)  $\sqrt{3} \times \sqrt{5}$ ; (2)  $\sqrt{\frac{1}{3}} \times \sqrt{27}$ .

解：(1)  $\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{15}$ ;

(2)  $\sqrt{\frac{1}{3}} \times \sqrt{27} = \sqrt{\frac{1}{3} \times 27} = \sqrt{9} = 3$ .

在本章中，如果没有特别说明，所有的字母都表示正数。

把  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$  反过来，就得到

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$
,

利用它可以进行二次根式的化简。

例 2 化简：

(1)  $\sqrt{16 \times 81}$ ; (2)  $\sqrt{4a^2b^3}$ .

解：(1)  $\sqrt{16 \times 81} = \sqrt{16} \times \sqrt{81} = 4 \times 9 = 36$ ;

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \sqrt{4a^2b^3} &= \sqrt{4} \cdot \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^3} \\
 &= 2 \cdot a \cdot \sqrt{b^2 \cdot b} \\
 &= 2a \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{b} = 2ab\sqrt{b}.
 \end{aligned}$$

被开方数  $4a^2b^3$  含 4,  $a^2$ ,  $b^2$  这样的因数或因式, 它们可以开方后移到根号外, 它们是开得尽的因数或因式.

你还有其他解法吗?

### 例 3 计算:

$$(1) \sqrt{14} \times \sqrt{7}; \quad (2) 3\sqrt{5} \times 2\sqrt{10};$$

$$(3) \sqrt{3x} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}xy}.$$

解:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \sqrt{14} \times \sqrt{7} &= \sqrt{14 \times 7} = \sqrt{7^2 \times 2} \\
 &= \sqrt{7^2} \times \sqrt{2} = 7\sqrt{2};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad 3\sqrt{5} \times 2\sqrt{10} &= 3 \times 2 \sqrt{5 \times 10} \\
 &= 6\sqrt{5^2 \times 2} = 6\sqrt{5^2} \times \sqrt{2} \\
 &= 6 \times 5\sqrt{2} = 30\sqrt{2};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \sqrt{3x} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}xy} &= \sqrt{3x \cdot \frac{1}{3}xy} \\
 &= \sqrt{3 \cdot \frac{1}{3}x^2y} = \sqrt{x^2y} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y} \\
 &= x\sqrt{y}.
 \end{aligned}$$

### 练习

1. 计算:

$$(1) \sqrt{2} \times \sqrt{5}; \quad (2) \sqrt{3} \times \sqrt{12};$$

$$(3) 2\sqrt{xy} \cdot \sqrt{\frac{1}{x}}; \quad (4) \sqrt{288} \times \sqrt{\frac{1}{72}}.$$

2. 化简:

$$(1) \sqrt{49 \times 121}; \quad (2) \sqrt{225};$$

$$(3) \sqrt{4y}; \quad (4) \sqrt{16ab^2c^3}.$$

3. 一个矩形的长和宽分别是  $\sqrt{10}$  cm 和  $2\sqrt{2}$  cm. 求这个矩形的面积.



1. 计算下列各式，观察计算结果，你发现什么规律？

$$(1) \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = (\quad), \sqrt{\frac{4}{9}} = (\quad);$$

$$(2) \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = (\quad), \sqrt{\frac{16}{25}} = (\quad).$$

2. 用你发现的规律填空，并用计算器进行验算：

$$(1) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \sqrt{\frac{2}{3}}; \quad (2) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \quad \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

一般地，对二次根式的除法规定

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (a \geq 0, b > 0).$$

例 4 计算：

$$(1) \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}}, \quad (2) \sqrt{\frac{3}{2}} \div \sqrt{\frac{1}{18}}.$$

$$\text{解：(1)} \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{24}{3}} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2};$$

$$(2) \sqrt{\frac{3}{2}} \div \sqrt{\frac{1}{18}} = \sqrt{\frac{3}{2} \div \frac{1}{18}} = \sqrt{\frac{3}{2} \times 18} = \sqrt{3 \times 9} = 3\sqrt{3}.$$

把  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$  反过来，就得到

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a \geq 0, b > 0),$$

利用它可以进行二次根式的化简。

例 5 化简：

$$(1) \sqrt{\frac{3}{100}}, \quad (2) \sqrt{\frac{25y}{9x^2}}.$$

解：(1)  $\sqrt{\frac{3}{100}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{3}}{10}$ ;

(2)  $\sqrt{\frac{25y}{9x^2}} = \frac{\sqrt{25y}}{\sqrt{9x^2}} = \frac{5\sqrt{y}}{9x}$ .

在解法二中，式子变形  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}$  是为了去掉分母中的根号。

在二次根式的运算中，最后结果一般要求分母中不含二次根式。

在二次根式的运算中，最后结果中的二次根式一般要写成最简二次根式的形式。

例 6 计算：

(1)  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ ; (2)  $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{27}}$ ; (3)  $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2a}}$

解：(1)

解法一： $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{3 \times 5}{5 \times 5}} = \sqrt{\frac{15}{25}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$ .

解法二： $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{15}}{5}$ .

(2)  $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{27}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3^2 \times 3}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3^2} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ .

(3)  $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2a}} = \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{2a}}{\sqrt{2a} \cdot \sqrt{2a}} = \frac{4\sqrt{a}}{2a} = \frac{2\sqrt{a}}{a}$ .

观察上面例 4、例 5、例 6 中各小题的最后结果，比如  $2\sqrt{2}$ 、 $\frac{\sqrt{3}}{10}$ 、 $\frac{2\sqrt{a}}{a}$  等，可以发现这些式子中的二次根式有如下两个特点：

(1) 被开方数不含分母；

(2) 被开方数中不含能开得尽方的因数或因式。

我们把满足上述两个条件的二次根式，叫做**最简二次根式**。

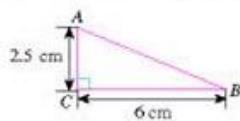


图 21.2-1

例 7 如图 21.2-1，在  $Rt\triangle ABC$  中， $\angle C=90^\circ$ ， $AC=2.5$  cm， $BC=6$  cm，求  $AB$  的长。

解：因为  $AB^2=AC^2+BC^2$ ，

$$\begin{aligned}
 \text{所以 } AB &= \sqrt{AC^2 + BC^2} \\
 &= \sqrt{2.5^2 + 6^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 36} \\
 &= \sqrt{\frac{169}{4}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{4}} = \frac{13}{2} = 6.5 \text{ (cm).}
 \end{aligned}$$

因此  $AB$  的长为 6.5 cm.



现在我们来看本章引言中的问题.

如果两个电视塔的高分别是  $h_1$  km,  $h_2$  km, 那么

它们的传播半径的比为  $\frac{\sqrt{2Rh_1}}{\sqrt{2Rh_2}}$ . 这个式子还可以化简:

$$\frac{\sqrt{2Rh_1}}{\sqrt{2Rh_2}} = \frac{\sqrt{2R} \cdot \sqrt{h_1}}{\sqrt{2R} \cdot \sqrt{h_2}} = \frac{\sqrt{h_1}}{\sqrt{h_2}} = \frac{\sqrt{h_1 h_2}}{h_2}.$$

### 练习

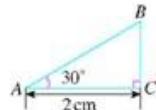
1. 计算:

$$(1) \sqrt{18} \div \sqrt{2}; \quad (2) \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{6}}; \quad (3) \sqrt{2a} \div \sqrt{6a}; \quad (4) \sqrt{\frac{b}{5}} \div \sqrt{\frac{b}{20a^2}}.$$

2. 把下列二次根式化成最简二次根式:

$$(1) \sqrt{32}; \quad (2) \sqrt{40}; \quad (3) \sqrt{1.5}; \quad (4) \sqrt{\frac{4}{3}}.$$

3. 如图, 在  $Rt\triangle ABC$  中,  $\angle C=90^\circ$ ,  $\angle A=30^\circ$ ,  $AC=2$  cm, 求斜边  $AB$  的长.



(第 3 题)

## 习题21.2

### 复习巩固

1. 计算:

(1)  $\sqrt{24} \times \sqrt{27}$ ; (2)  $\sqrt{6} \times (-\sqrt{15})$ ;  
(3)  $\sqrt{18} \times \sqrt{20} \times \sqrt{75}$ ; (4)  $\sqrt{3^2 \times 4^3 \times 5}$ .

2. 计算:

(1)  $\sqrt{18} \div \sqrt{8}$ ; (2)  $\frac{4\sqrt{15}}{2\sqrt{5}}$ ;  
(3)  $\sqrt{1\frac{2}{3}} \div \sqrt{\frac{5}{6}}$ ; (4)  $\frac{2\sqrt{x^2y}}{3\sqrt{xy}}$ .

3. 化简:

(1)  $\sqrt{4 \times 49}$ ; (2)  $\sqrt{300}$ ;  
(3)  $\sqrt{\frac{9}{49}}$ ; (4)  $\sqrt{\frac{a^2b}{4c^2}}$ .

### 综合运用

4. 设矩形的长与宽分别为  $a$ 、 $b$ , 根据下列条件求面积  $S$ :

(1)  $a=\sqrt{8}$ ,  $b=\sqrt{12}$ ;  
(2)  $a=2\sqrt{50}$ ,  $b=3\sqrt{32}$ .

5. 已知正方形的边长为  $a$ , 面积为  $S$ .

(1) 如果  $S=50 \text{ cm}^2$ , 求  $a$ ;  
(2) 如果  $S=242 \text{ cm}^2$ , 求  $a$ .

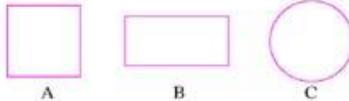
6. 计算:

(1)  $\sqrt{0.4} \times \sqrt{3.6}$ ; (2)  $\sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt{\frac{27}{8}}$ ;  
(3)  $\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{40}}$ ; (4)  $\sqrt{27} \times \sqrt{50} \div \sqrt{6}$ .

7. 已知  $\sqrt{2} \approx 1.414$ , 求  $\sqrt{\frac{1}{2}}$  与  $\sqrt{8}$  的近似值.

拓广探索 ►►

8. 已知正方形 A、矩形 B、圆 C 的面积均为  $628 \text{ cm}^2$ ，其中矩形 B 的长是宽的 2 倍。如果  $\pi$  取 3.14，试比较它们的周长  $L_A$ 、 $L_B$ 、 $L_C$  的大小。解完本题后，你能得到什么启示？



(第 8 题)

9. 用长 3 cm、宽 2.5 cm 的邮票 30 枚摆成一个正方形，这个正方形的边长是多少？你可以用几种不同的方法求解？



10. 用计算器计算：

(1)  $\sqrt{9 \times 9 + 19}$ ; (2)  $\sqrt{99 \times 99 + 199}$ ;

(3)  $\sqrt{999 \times 999 + 1999}$ ; (4)  $\sqrt{9999 \times 9999 + 19999}$ .

观察上面几题的结果，你能发现什么规律？用你发现的规律直接写出下题的结果：

$$\sqrt{\underbrace{99\cdots 9}_{n+2} \times \underbrace{99\cdots 9}_{n+2} + \underbrace{199\cdots 9}_{n+2}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

## 21.3 二次根式的加减

**问题** 现有一块长 7.5 dm、宽 5 dm 的木板，能否采用如图 21.3-1 的方式，在这块木板上截出两个面积分别是  $8 \text{ dm}^2$  和  $18 \text{ dm}^2$  的正方形木板？

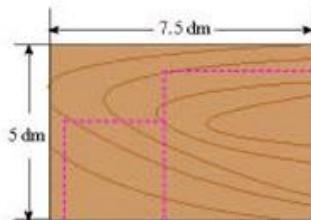


图 21.3-1

因为大、小正方形木板的边长分别为  $\sqrt{18} \text{ dm}$  和  $\sqrt{8} \text{ dm}$ ，显然木板够宽。下面考虑木板是否够长。

由于两个正方形的边长的和为  $(\sqrt{8} + \sqrt{18}) \text{ dm}$ 。这实际上是求  $\sqrt{8}$ 、 $\sqrt{18}$  这两个二次根式的和，我们可以这样来计算：

在有理数范围内成立的运算律，在实数范围内仍然成立。

$$\begin{aligned}\sqrt{8} + \sqrt{18} &= 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} && (\text{化成最简二次根式}) \\ &= (2+3)\sqrt{2} && (\text{分配律}) \\ &= 5\sqrt{2}.\end{aligned}$$

由  $\sqrt{2} < 1.5$  可知  $5\sqrt{2} < 7.5$ ，即两个正方形的边长的和小于木板的长，因此可以用这块木材按要求截出两个面积分别是  $8 \text{ dm}^2$  和  $18 \text{ dm}^2$  的正方形木板。

分析上面计算  $\sqrt{8} + \sqrt{18}$  的过程，可以看到，把  $\sqrt{8}$

和 $\sqrt{18}$ 化成最简二次根式 $2\sqrt{2}$ 和 $3\sqrt{2}$ 后，由于被开方数相同（都是2），可以利用分配律将 $2\sqrt{2}$ 和 $3\sqrt{2}$ 进行合并。

二次根式加减时，可以先将二次根式化成最简二次根式，再将被开方数相同的二次根式进行合并。

例1 计算：

$$(1) \sqrt{9a} + \sqrt{25a}; \quad (2) \sqrt{80} - \sqrt{45}.$$

解：

$$(1) \sqrt{9a} + \sqrt{25a} = 3\sqrt{a} + 5\sqrt{a} = (3+5)\sqrt{a} = 8\sqrt{a};$$

$$(2) \sqrt{80} - \sqrt{45} = 4\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = (4-3)\sqrt{5} = \sqrt{5}.$$

比较二次根式的  
加减与整式的加减，  
你能得出什么结论？

$\sqrt{3}$ 与 $\sqrt{5}$ 能合并吗？

例2 计算：

$$(1) 2\sqrt{12} - 6\sqrt{\frac{1}{3}} + 3\sqrt{48};$$

$$(2) (\sqrt{12} + \sqrt{20}) + (\sqrt{3} - \sqrt{5}).$$

$$\begin{aligned} \text{解：(1)} \quad & 2\sqrt{12} - 6\sqrt{\frac{1}{3}} + 3\sqrt{48} \\ &= 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 12\sqrt{3} \\ &= 14\sqrt{3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{解：(2)} \quad & (\sqrt{12} + \sqrt{20}) + (\sqrt{3} - \sqrt{5}) \\ &= 2\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{5} \\ &= 3\sqrt{3} + \sqrt{5}. \end{aligned}$$

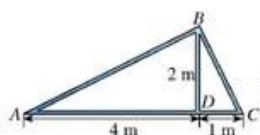


图 21.3-2

例3 要焊接一个如图21.3-2所示的钢架，大约需要多少米钢材（精确到0.1 m）？

解：根据图中尺寸可得

$$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5},$$

$$BC = \sqrt{BD^2 + CD^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

所需钢材的长度为

$$\begin{aligned} & AB + BC + AC + BD \\ &= 2\sqrt{5} + \sqrt{5} + 5 + 2 \\ &= 3\sqrt{5} + 7 \\ &\approx 3 \times 2.24 + 7 \\ &\approx 13.7(\text{m}). \end{aligned}$$

答：要焊接一个如图所示的钢架，大约需要 13.7 m 的钢材。

### 练习

1. 下列计算是否正确？为什么？

(1)  $\sqrt{8} - \sqrt{3} = \sqrt{8-3}$ ; (2)  $\sqrt{4} + \sqrt{9} = \sqrt{4+9}$ ; (3)  $3\sqrt{2} - \sqrt{2} =$

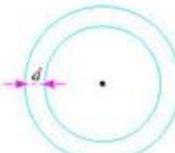
2. 计算：

(1)  $2\sqrt{7} - 6\sqrt{7}$ ; (2)  $\sqrt{80} - \sqrt{20} + \sqrt{5}$ ;

(3)  $\sqrt{18} + (\sqrt{98} - \sqrt{27})$ ;

(4)  $(\sqrt{24} + \sqrt{0.5}) - \left(\sqrt{\frac{1}{8}} - \sqrt{6}\right)$ .

3. 如图，两个圆的圆心相同，它们的面积分别是  $12.56 \text{ cm}^2$  和  $25.12 \text{ cm}^2$ ，求圆环的宽度  $d$  ( $\pi$  取 3.14)。



(第3题)

### 例4 计算：

(1)  $(\sqrt{8} + \sqrt{3}) \times \sqrt{6}$ ; (2)  $(4\sqrt{2} - 3\sqrt{6}) \div 2\sqrt{2}$ .

解：(1)  $(\sqrt{8} + \sqrt{3}) \times \sqrt{6}$

$$= \sqrt{8} \times \sqrt{6} + \sqrt{3} \times \sqrt{6}$$

$$= \sqrt{8 \times 6} + \sqrt{3 \times 6}$$

$$= 4\sqrt{3} + 3\sqrt{2};$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & (4\sqrt{2}-3\sqrt{6}) \div 2\sqrt{2} \\
 & = 4\sqrt{2} \div 2\sqrt{2} - 3\sqrt{6} \div 2\sqrt{2} \\
 & = 2 - \frac{3}{2}\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

**例 5 计算:**

$$(1) (\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}-5); \quad (2) (\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3}).$$

**解:** (1)  $(\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}-5)$

$$= (\sqrt{2})^2 + 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} - 15$$

$$= 2 - 2\sqrt{2} - 15$$

$$= -13 - 2\sqrt{2};$$

$$(2) (\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$$

$$= (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2$$

$$= 5 - 3$$

$$= 2.$$

例 5 第 (1)、(2) 小题分别利用了多项式乘法法则和公式  $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ . 在二次根式的运算中, 多项式乘法法则和乘法公式仍然适用.

### 练习

1. 计算:

$$(1) \sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{5}); \quad (2) (\sqrt{80}+\sqrt{40}) \div \sqrt{5};$$

$$(3) (\sqrt{5}+3)(\sqrt{5}+2); \quad (4) (\sqrt{a}+\sqrt{b})(3\sqrt{a}-\sqrt{b}).$$

2. 计算:

$$(1) (4+\sqrt{7})(4-\sqrt{7}); \quad (2) (\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2});$$

$$(3) (\sqrt{3}+2)^2; \quad (4) (2\sqrt{5}-\sqrt{2})^2.$$

### 习题21.3

#### 复习巩固

1. 下列计算是否正确? 为什么?

(1)  $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$ ;

(2)  $2 + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ ;

(3)  $3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3$ ;

(4)  $\frac{\sqrt{18} - \sqrt{8}}{2} = \sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1$ .

2. 计算:

(1)  $2\sqrt{12} + \sqrt{27}$ ;

(2)  $\sqrt{18} - \sqrt{\frac{9}{2}}$ ;

(3)  $\sqrt{4x^3} + 2\sqrt{2x}$ ;

(4)  $\sqrt{2x} - \sqrt{2a^2x^3}$ .

3. 计算:

(1)  $\sqrt{18} - \sqrt{32} + \sqrt{2}$ ;

(2)  $\sqrt{75} - \sqrt{54} + \sqrt{96} - \sqrt{108}$ ;

(3)  $(\sqrt{45} + \sqrt{18}) - (\sqrt{8} - \sqrt{125})$ ;

(4)  $\frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \frac{3}{4}(\sqrt{2} - \sqrt{27})$ .

4. 计算:

(1)  $(\sqrt{12} + 5\sqrt{8})\sqrt{3}$ ;

(2)  $(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})$ ;

(3)  $(5\sqrt{3} + 2\sqrt{5})^2$ ;

(4)  $(\sqrt{48} + \frac{1}{4}\sqrt{6}) \div \sqrt{27}$ .

#### 综合运用

5. 已知  $\sqrt{5} \approx 2.236$ , 求  $5\sqrt{\frac{1}{5}} - \frac{5}{4}\sqrt{\frac{4}{5}} + \sqrt{45}$  的近似值 (精确到 0.01).

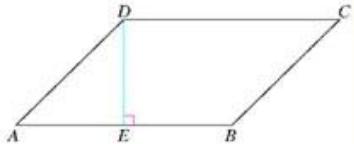
6. 已知  $x = \sqrt{3} + 1$ ,  $y = \sqrt{3} - 1$ , 求下列各式的

值:

(1)  $x^2 + 2xy + y^2$ ;

(2)  $x^2 - y^2$ .

7. 如图, 在  $\square ABCD$  中,  $DE \perp AB$ ,  $E$  点在  $AB$  上,  $DE = AE = EB = a$ . 求  $\square ABCD$  的周长.



(第 7 题)

**拓广探索**

8. 已知  $a + \frac{1}{a} = \sqrt{10}$ , 求  $a - \frac{1}{a}$  的值.
9. 在下列各方程后面的括号内分别给出了一组数, 从中找出方程的解:
- (1)  $2x^2 - 6 = 0$ ,  $(\sqrt{3}, \sqrt{6}, -\sqrt{3}, -\sqrt{6})$ ;
  - (2)  $2(x+5)^2 = 24$ ,  $(5+2\sqrt{3}, 5-2\sqrt{3}, -5+2\sqrt{3}, -5-2\sqrt{3})$ .

**阅读与思考**

选学

**海伦—秦九韶公式**

如果一个三角形的三边长分别为  $a, b, c$ , 设  $p = \frac{a+b+c}{2}$ , 则三角形的面积为

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \quad ①$$

古希腊的几何学家海伦 (Heron, 约公元 50 年), 在数学史上以解决几何测量问题而闻名. 在他的著作《度量》一书中, 给出了这一公式和它的证明.

我国南宋时期数学家秦九韶 (约 1202—1261), 曾提出利用三角形的三边求面积的“秦九韶公式”

$$S = \sqrt{\frac{1}{4} \left[ a^2 b^2 - \left( \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \right)^2 \right]}. \quad ②$$

下面我们对公式②进行变形.

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{4} \left[ a^2 b^2 - \left( \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \right)^2 \right]} &= \sqrt{\left( \frac{1}{2} ab \right)^2 - \left( \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4} \right)^2} \\ &= \sqrt{\left( \frac{1}{2} ab + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4} \right) \left( \frac{1}{2} ab - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4} \right)} \\ &= \sqrt{\frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{4} \cdot \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{(a+b)^2 - c^2}{4} \cdot \frac{c^2 - (a-b)^2}{4}} \end{aligned}$$

$$-\sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2}}$$

$$-\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

这说明“海伦公式”与“秦九韶公式”实质上是同一个公式，所以我们也称①为“海伦—秦九韶公式”。

如图1，在 $\triangle ABC$ 中， $BC=4$ ， $AC=5$ ， $AB=6$ ，请你用“海伦—秦九韶公式”求 $\triangle ABC$ 的面积。

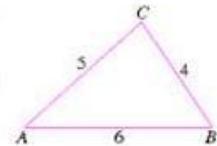


图1



## 数学活动

### 活动1 纸张规格与 $\sqrt{2}$ 的关系

书籍和纸张的长与宽都有固定的尺寸，常用纸张的规格由下列两个表给出：

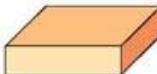
A型	mm×mm	B型	mm×mm
A7	74×105	B8	64×91
A6	105×148	B7	91×128
A5	148×210	B6	128×182
A4	210×297	B5	182×257
A3	297×420	B4	257×364
A2	420×594	B3	364×515
A1	594×841		

(1) 测量教科书与课外读物的长与宽，看看它们属于哪种规格？

(2) 使用计算器求出各类纸张长与宽的比，你有什么发现？各类纸张的长与宽有什么关系？

### 活动2 做长方体纸盒

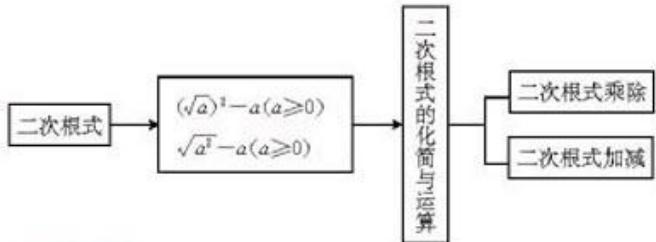
做一个底面积为  $24 \text{ cm}^2$ ，长、宽、高的比为  $4:2:1$  的长方体，并回答下列问题：



- (1) 这个长方体的长、宽、高分别是多少？
- (2) 长方体的表面积是多少？
- (3) 长方体的体积是多少？

## 小结

### 一、本章知识结构图



### 二、回顾与思考

1. 对于二次根式，要明确被开方数必须是非负数，也就是说，对于 $\sqrt{a}$ ，只有当  $a \geq 0$  时才有意义。
2. 二次根式的运算中，一般要先把式子中的二次根式适当化简。举例说明什么是最简二次根式？
3. 结合例子说明二次根式的加、减、乘、除运算法则。
4. 结合本章内容，进一步体会代数式在表示数量关系方面的作用。

## 复习题21

### 复习巩固

1. 当  $x$  是什么值时, 下列各式在实数范围内有意义?

(1)  $\sqrt{3-x}$ ; (2)  $\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$ .

2. 化简:

(1)  $\sqrt{500}$ ; (2)  $\sqrt{12x}$ ;  
(3)  $\sqrt{4\frac{2}{3}}$ ; (4)  $\sqrt{\frac{2}{3a^2}}$ .

3. 计算:

(1)  $(\sqrt{24}-\sqrt{\frac{1}{2}})-(\sqrt{\frac{1}{8}}+\sqrt{6})$ ; (2)  $2\sqrt{12}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\div 5\sqrt{2}$ ;  
(3)  $(2\sqrt{3}+\sqrt{6})(2\sqrt{3}-\sqrt{6})$ ; (4)  $(2\sqrt{48}-3\sqrt{27})\div\sqrt{6}$ .

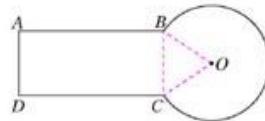
4. 如果正方形的边长为  $a$ , 它的面积与长为 96 cm、宽为 12 cm 的矩形的面积相等. 求  $a$  的值.

5. 如果直角三角形的两条直角边的长分别为  $2\sqrt{3}+1$  和  $2\sqrt{3}-1$ . 求斜边  $c$  的长.

### 综合运用

6. 当  $x=\sqrt{5}-1$  时, 求代数式  $x^2+5x-6$  的值.

7. 如图, 一种零件的横截面是由矩形, 三角形和扇形组成,  $AB=25$  mm,  $\angle BOC=60^\circ$ , 半径  $OB=10$  mm. 求这种零件的横截面面积(精确到 0.01 mm<sup>2</sup>,  $\pi$  取 3.142,  $\sqrt{3}\approx 1.732$ ).



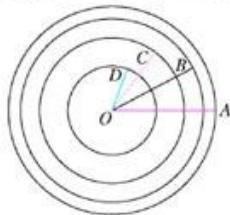
(第 7 题)

8. 电流通过导线时会产生热量, 设电流是  $I$  (安培), 导线电阻为  $R$  (欧姆), 1 秒产生的热量为  $Q$  (焦), 根据物理公式,  $Q=0.24I^2R$ . 试用  $Q$ 、 $R$  表示  $I$ ; 如果导线的电阻为 5 欧姆, 1 秒时间导线产生 30 焦的热量, 求电流  $I$  的值.

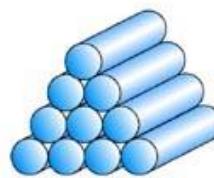
拓广探索 ►►

9. 已知  $n$  是正整数,  $\sqrt{189n}$  是整数, 求  $n$  的最小值.

10. 把一个圆心为点  $O$ , 半径为  $r$  的圆的面积四等分, 请你尽可能多地设想各种分割方法. 如图, 如果圆心也是点  $O$  的三个圆把大圆  $O$  的面积四等分, 求这三个圆的半径  $OB$ 、 $OC$ 、 $OD$  的长.



(第 10 题)



(第 11 题)

11. 10 个外径为 1 m 的钢管以如图方式堆放, 为了防雨, 需要搭建防雨棚, 这个防雨棚的高度最低应为多少米 (精确到 0.1 m)?