

## 第二十二章 一元二次方程



# 22

- 22.1 一元二次方程
- 22.2 降次——解一元二次方程
- 22.3 实际问题与一元二次方程

我们来看一个问题。

要设计一座2m高的人体雕像，使雕像的上部（腰以上）与下部（腰以下）的高度比，等于下部与全部的高度比，雕像的下部应设计为多高？

雕像上部的高度 $AC$ ，下部的高度 $BC$ 应有如下关系：

$$\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{2} \quad \text{即} \quad BC^2 = 2AC.$$

设雕像下部高 $x$ m，于是得方程

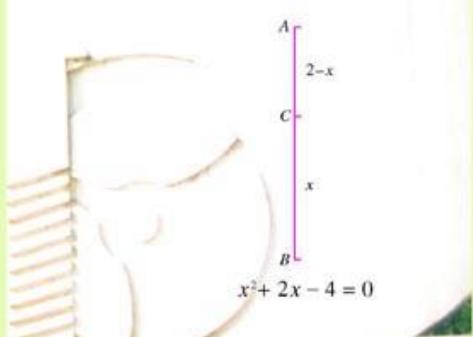
$$x^2 = 2(2-x).$$

整理得

$$x^2 + 2x - 4 = 0.$$

你会发现这个方程与以前学习过的一次方程不同，其中未知数 $x$ 的最高次数是2。怎样解这样的方程从而得到问题的答案呢？

本章中，我们将认识一种新方程——一元二次方程，讨论解这种方程的方法，并运用这种方程解决一些实际问题。通过本章的学习，你对方程的认识将从一次方程扩展到二次方程。



## 22.1 一元二次方程

引言中的方程

$$x^2 + 2x - 4 = 0 \quad ①$$

有一个未知数  $x$ ,  $x$  的最高次数是 2. 像这样的方程有广泛的应用, 请看下面的问题.



图 22.1-1

**问题 1** 如图 22.1-1, 有一块矩形铁皮, 长 100 cm, 宽 50 cm, 在它的四角各切去一个正方形, 然后将四周突出部分折起, 就能制作一个无盖方盒. 如果要制作的无盖方盒的底面积为  $3600 \text{ cm}^2$ , 那么铁皮各角应切去多大的正方形?

设切去的正方形的边长为  $x$  cm, 则盒底的长为  $(100-2x)$  cm, 宽为  $(50-2x)$  cm. 根据方盒的底面积为  $3600 \text{ cm}^2$ , 得

$$(100-2x)(50-2x)=3600.$$

整理, 得

$$4x^2 - 300x + 1400 = 0.$$

化简, 得

$$x^2 - 75x + 350 = 0. \quad ②$$

由方程②可以得出所切正方形的具体尺寸.



**问题 2** 要组织一次排球邀请赛, 参赛的每两个队之间都要比赛一场. 根据场地和时间等条件, 赛程计划安排 7 天, 每天安排 4 场比赛, 比赛组织者应邀请多少个队参赛?

全部比赛共  $4 \times 7 = 28$  (场).

设应邀请  $x$  个队参赛, 每个队要与其他  $(x-1)$

个队各赛 1 场, 由于甲队对乙队的比赛和乙队对甲队的比赛是同一场比赛, 所以全部比赛共  $\frac{1}{2}x(x-1)$  场.

列方程

$$\frac{1}{2}x(x-1)=28.$$

整理, 得

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x = 28.$$

化简, 得

$$x^2 - x = 56.$$

③

由方程③可以得出参赛队数.

方程③中未知数的个数和次数各是多少?



### 观察

方程①②③有什么共同点?

可以发现, 这些方程的两边都是整式, 方程中只含有一个未知数, 未知数的最高次数是 2. 同样地, 方程  $4x^2=9$ ,  $x^2+3x=0$ ,  $3y^2-5y=7$  等也是这样的方程. 像这样的等号两边都是整式, 只含有一个未知数 (一元), 并且未知数的最高次数是 2 (二次) 的方程, 叫做 **一元二次方程** (quadratic equation in one unknown).

一般地, 任何一个关于  $x$  的一元二次方程, 经过整理, 都能化成如下形式

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0).$$

这种形式叫做一元二次方程的一般形式. 其中  $ax^2$  是二次项,  $a$  是二次项系数;  $bx$  是一次项,  $b$  是一次项系数;  $c$  是常数项.

为什么规定  
 $a \neq 0$ ?

例 将方程  $3x(x-1)=5(x+2)$  化成一元二次方

程的一般形式，并写出其中的二次项系数、一次项系数及常数项。

解：去括号，得

$$3x^2 - 3x = 5x + 10.$$

移项，合并同类项，得一元一次方程的一般形式

$$3x^2 - 8x - 10 = 0.$$

其中二次项系数为 3，一次项系数为 -8，常数项为 -10。

### 练习

1. 将下列方程化成一元二次方程的一般形式，并写出其中的二次项系数、一次项系数及常数项：

(1)  $5x^2 - 1 - 4x$ ; (2)  $4x^2 - 81$ ;  
(3)  $4x(x+2) - 25$ ; (4)  $(3x-2)(x+1) - 8x - 3$ .

2. 根据下列问题，列出关于  $x$  的方程，并将其化成一元二次方程的一般形式：

- (1) 4 个完全相同的正方形的面积之和是  $25 \text{ m}^2$ ，求正方形的边长  $x$ ；  
(2) 一个矩形的长比宽多 2 m，面积是  $100 \text{ m}^2$ ，求矩形的长  $x$ ；  
(3) 把 1 m 长的木条分成两段，使较短一段的长与全长的积，等于较长一段的长的平方，求较短一段的长  $x$ ；  
(4) 一个直角三角形的斜边长 10 cm，两条直角边相差 2 cm，求较长的直角边长  $x$ 。

前面有关排球邀请赛的问题中，我们列出方程③

$$x^2 - x = 56.$$

当  $x=1$  时， $x^2 - x = 0$ ；当  $x=2$  时， $x^2 - x = 2$  ……我们可以得出下表：

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
$x^2 - x$	0	2	6	12	20	30	42	56	72	90	…

可以发现，当  $x=8$  时， $x^2-x=56$ ，所以  $x=8$  是方程  $x^2-x=56$  的解。一元二次方程的解也叫做一元二次方程的根 (root)。

是否只有  $x=8$  是方程  $x^2-x=56$  的根呢？

将  $x=-7$  代入方程  $x^2-x=56$ ，左边  $=(-7)^2-(-7)=56$  = 右边，所以  $x=-7$  也是方程  $x^2-x=56$  的根。

通过对后面 22.2 节的学习，我们将能说明除 8 和 -7 外，方程  $x^2-x=56$  没有其他的根。

虽然方程  $x^2-x=56$  有两个根 (8 和 -7)，但是排球邀请赛问题的答案只有一个，即应邀请 8 个队参赛。

这就是说，由实际问题列出方程并得出方程的解后，还要考虑这些解是否确实是实际问题的解。

你能说出这是为什么吗？

### 思考

你能想出下列方程的根吗？

(1)  $x^2-36=0$ ;      (2)  $4x^2-9=0$ .

### 练习

1. 下面哪些数是方程  $x^2-x-6=0$  的根？

-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4.

2. 试写出方程  $x^2-x=0$  的根，你能写出几个？

## 习题22.1

### 复习巩固

1. 将下列方程化成一元二次方程的一般形式，并写出它们的二次项系数、一次项系数及常数项：
  - (1)  $3x^2+1=6x$ ;
  - (2)  $4x^2+5x=81$ ;
  - (3)  $x(x+5)=0$ ;
  - (4)  $(2x-2)(x-1)=0$ ;
  - (5)  $x(x+5)=5x-10$ ;
  - (6)  $(3x-2)(x+1)=x(2x-1)$ .
2. 根据下列问题列方程，并将其化成一元二次方程的一般形式：
  - (1) 一个圆的面积是  $6.28 \text{ m}^2$ ，求半径 ( $\pi \approx 3.14$ )；
  - (2) 一个直角三角形的两条直角边相差  $3 \text{ cm}$ ，面积是  $9 \text{ cm}^2$ ，求较长的直角边的长。
3. 下列哪些数是方程  $x^2+x-12=0$  的根？  
 $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ .
4. 写出下列方程的根：
  - (1)  $9x^2=1$ ;
  - (2)  $25x^2-4=0$ ;
  - (3)  $4x^2=2$ .

### 综合运用

根据下列问题列方程，并将其化成一元二次方程的一般形式（第5~7题）：

5. 一个矩形的长比宽多  $1 \text{ cm}$ ，对角线长  $5 \text{ cm}$ ，矩形的长和宽各是多少？
6. 有一根  $1 \text{ m}$  长的铁丝，怎样用它围成一个面积为  $0.06 \text{ m}^2$  的矩形？
7. 参加一次聚会的每两人都握了一次手，所有人共握手  $10$  次，有多少人参加聚会？

### 拓广探索

8. 你能想出下列方程的根吗？如果能，写出方程的根，并说出你是怎样想出的。
  - (1)  $(x-2)^2=1$ ;
  - (2)  $9(x-2)^2=1$ ;
  - (3)  $x^2+2x+1=4$ ;
  - (4)  $x^2-6x+9=0$ .
9. 如果  $2$  是方程  $x^2-c=0$  的一个根，那么常数  $c$  是几？你能得出这个方程的其他根吗？

## 22.2 降次——解一元二次方程

### 22.2.1 配方法



**问题1** 一桶某种油漆可刷的面积为 $1500\text{ dm}^2$ ，李林用这桶油漆恰好刷完10个同样的正方体形状的盒子的全部外表面，你能算出盒子的棱长吗？

设正方体的棱长为 $x\text{ dm}$ ，则一个正方体的表面积为 $6x^2\text{ dm}^2$ 。根据一桶油漆可刷的面积，列出方程

$$10 \times 6x^2 = 1500. \quad ①$$

由此可得

$$x^2 = 25.$$

根据平方根的意义，得

$$x = \pm 5,$$

即

$$x_1 = 5, x_2 = -5.$$

可以验证，5和-5是方程①的两根，但是棱长不能是负值，所以正方体的棱长为5 dm。



对照上面解方程①的过程，你认为应怎样解方程 $(2x-1)^2=5$ 及方程 $x^2+6x+9=2$ ？

在解方程①时，由方程 $x^2=25$ 得 $x=\pm 5$ ，由此容易想到：由方程

$$(2x-1)^2=5, \quad ②$$

得

$$2x-1=\pm\sqrt{5},$$

即

$$2x-1=\sqrt{5}, \quad 2x-1=-\sqrt{5}. \quad ③$$

方程的两根为

$$x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

上面的解法中, 由方程②得到③, 实质上是把一个一元二次方程“降次”, 转化为两个一元一次方程, 这样问题就容易解决了.

方程  $x^2+6x+9=2$  的左边是完全平方形式, 这个方程可以化成  $(x+3)^2=2$ , 进行降次, 得 \_\_\_\_\_, 方程的根为  $x_1=$  \_\_\_\_\_,  $x_2=$  \_\_\_\_\_.

### 归纳

如果方程能化成  $x^2=p$  或  $(mx+n)^2=p$  ( $p\geqslant 0$ ) 的形式, 那么可得  $x=\pm\sqrt{p}$  或  $mx+n=\pm\sqrt{p}$ .

### 练习

解下列方程:

- |                     |                      |
|---------------------|----------------------|
| (1) $2x^2-8=0$ ;    | (2) $9x^2-5=3$ ;     |
| (3) $(x+6)^2-9=0$ ; | (4) $3(x-1)^2-6=0$ ; |
| (5) $x^2-4x+4=5$ ;  | (6) $9x^2+6x+1=4$ .  |

**问题 2** 要使一块矩形场地的长比宽多 6 m, 并且面积为 16 m<sup>2</sup>, 场地的长和宽应各是多少?

设场地宽  $x$  m, 长  $(x+6)$  m. 根据矩形面积为 16 m<sup>2</sup>, 列方程

$$x(x+6)=16,$$

即

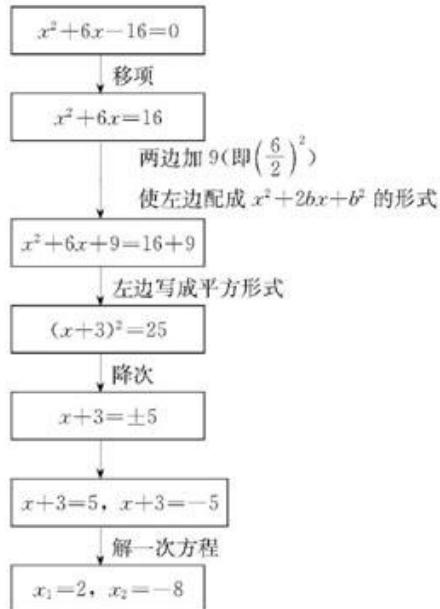
$$x^2 + 6x - 16 = 0. \quad ②$$



怎样解方程  $x^2 + 6x - 16 = 0$ ?

对比这个方程与前面讨论过的方程  $x^2 + 6x + 9 = 2$ , 可以发现方程  $x^2 + 6x + 9 = 2$  的左边是含有  $x$  的完全平方形式, 右边是非负数, 可以直接降次解方程; 而方程  $x^2 + 6x - 16 = 0$  不具有上述形式, 直接降次有困难. 能设法把  $x^2 + 6x - 16 = 0$  化为具有上述形式的方程吗?

请看下面的框图:



可以验证，2和-8是方程②的两根，但是场地的宽不能是负值，所以场地的宽为2m，长为8(即 $2+6$ )m。

### 讨 论

以上解法中，为什么在方程 $x^2+6x=16$ 两边加9？加其他数行吗？

像上面那样，通过配成完全平方式来解一元二次方程的方法，叫做**配方法**。可以看出，配方是为了降次，把一个一元二次方程转化成两个一元一次方程来解。

**例1** 解下列方程：

(1)  $x^2-8x+1=0$ ;      (2)  $2x^2+1=3x$ ;  
(3)  $3x^2-6x+4=0$ .

**解：**(1) 移项，得

$$x^2-8x=-1.$$

配方

$$\begin{aligned}x^2-8x+4^2 &= -1+4^2, \\(x-4)^2 &= 15.\end{aligned}$$

由此可得

$$x-4=\pm\sqrt{15},$$

$$x_1=4+\sqrt{15}, \quad x_2=4-\sqrt{15}.$$

(2) 移项，得

$$2x^2-3x=-1.$$

二次项系数化为1，得

$$x^2-\frac{3}{2}x=-\frac{1}{2}.$$

配方

为什么方程两边都加 $4^2$ ？加其他数行吗？

方程的二次项系数不是1时，为便于配方，可以让方程的各项除以二次项系数。

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^2,$$

$$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}.$$

为什么方程两

$$\text{边都加 } \left(\frac{3}{4}\right)^2?$$

由此可得

$$x - \frac{3}{4} = \pm \frac{1}{4},$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

(3) 移项, 得

$$3x^2 - 6x = -4.$$

二次项系数化为 1, 得

$$x^2 - 2x = -\frac{4}{3}.$$

配方

$$x^2 - 2x + 1^2 = -\frac{4}{3} + 1^2,$$

$$(x-1)^2 = -\frac{1}{3}.$$

为什么方程两  
边都加  $1^2$ ?

因为实数的平方不会是负数, 所以  $x$  取任何实数时,  $(x-1)^2$  都是非负数, 上式都不成立, 即原方程无实数根.

### 练习

1. 填空:

$$(1) x^2 + 10x + \underline{\quad} = (x + \underline{\quad})^2; \quad (2) x^2 - 12x + \underline{\quad} = (x - \underline{\quad})^2;$$

$$(3) x^2 + 5x + \underline{\quad} = (x + \underline{\quad})^2; \quad (4) x^2 - \frac{2}{3}x + \underline{\quad} = (x - \underline{\quad})^2.$$

2. 解下列方程:

$$(1) x^2 + 10x + 9 = 0; \quad (2) x^2 - x - \frac{7}{4} = 0;$$

$$(3) 3x^2 + 6x - 4 = 0; \quad (4) 4x^2 - 6x - 3 = 0;$$

$$(5) x^2 + 4x - 9 = 2x - 11; \quad (6) x(x+4) = 8x + 12.$$

## 22.2.2 公式法

任何一元二次方程都可以写成一般形式

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0). \quad ①$$

能否也用配方法得出①的解呢?

移项, 得

$$ax^2 + bx = -c.$$

二次项系数化为 1, 得

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

配方

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

即

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \quad ②$$

因为  $a \neq 0$ ,  $4a^2 > 0$ . 当  $b^2 - 4ac \geq 0$  时,  $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \geq 0$ ,

由②式得

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad ③$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

由上可知, 一元二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

的根由方程的系数  $a$ ,  $b$ ,  $c$  确定. 因此, 解一元二次方程时, 可以先将方程化为一般形式  $ax^2 + bx + c = 0$ , 当  $b^2 - 4ac \geq 0$  时, 将  $a$ ,  $b$ ,  $c$  代入式子

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

就得到方程的根. 这个式子叫做一元二次方程的**求根公式**, 利用它解一元二次方程的方法叫做**公式法**. 由求根公式可知, 一元二次方程最多有两个实数根.

**例 2** 解下列方程:

$$\begin{array}{ll} (1) \ 2x^2 - x - 1 = 0; & (2) \ x^2 + 1.5 = -3x; \\ (3) \ x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{2} = 0; & (4) \ 4x^2 - 3x + 2 = 0. \end{array}$$

确定  $a$ ,  $b$ ,  
 $c$  的值时要注意  
符号.

**解:** (1)  $a=2$ ,  $b=-1$ ,  $c=-1$ .

$$b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 9 > 0.$$

$$x = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \times 2} = \frac{1+3}{4},$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{1}{2}.$$

(2) 将方程化为一般形式

$$x^2 + 3x + 1.5 = 0.$$

$$a=1, \quad b=3, \quad c=1.5.$$

$$b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 1.5 = 3 > 0.$$

$$x = \frac{-3 + \sqrt{3}}{2 \times 1} = \frac{-3 + \sqrt{3}}{2},$$

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = \frac{-3 - \sqrt{3}}{2}.$$

$$(3) \ a=1, \ b=-\sqrt{2}, \ c=\frac{1}{2}.$$

$$b^2 - 4ac = (-\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times \frac{1}{2} = 0.$$

$$x = \frac{-(-\sqrt{2}) + \sqrt{0}}{2 \times 1} = \frac{\sqrt{2} + 0}{2}.$$

$$x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$(4) \ a=4, \ b=-3, \ c=2.$$

$$b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 4 \times 2 = 9 - 32 = -23 < 0.$$

当  $b^2 - 4ac = 0$   
时,  $x_1 = x_2$ , 即方  
程的两根相等.

因为在实数范围负数不能开平方, 所以方程无实数根.

## 归纳

(1) 当  $b^2 - 4ac > 0$  时, 一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  有实数根

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

(2) 当  $b^2 - 4ac = 0$  时, 一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  有实数根

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a};$$

(3) 当  $b^2 - 4ac < 0$  时, 一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  没有实数根.

回到本章引言中的问题, 雕像下部高度  $x$ (m) 满足方程

$$x^2 + 2x - 4 = 0. \quad ①$$

解这个方程, 得

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-4)}}{2 \times 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2} = -1 \pm \sqrt{5},$$

$$x_1 = -1 + \sqrt{5}, \quad x_2 = -1 - \sqrt{5}.$$

精确到 0.001,  $x_1 \approx 1.236$ ,  $x_2 \approx -3.236$ .

虽然方程①有两个根, 但是其中只有  $x_1 \approx 1.236$  符合问题的实际意义, 所以雕像下部高度应设计为约 1.236 m.

## 练习

1. 解下列方程:

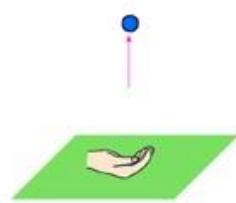
$$(1) x^2 + x - 6 = 0; \quad (2) x^2 - \sqrt{3}x - \frac{1}{4} = 0;$$

$$(3) 3x^2 - 6x - 2 = 0; \quad (4) 4x^2 - 6x = 0;$$

$$(5) x^2 + 4x + 8 = 4x + 11; \quad (6) x(2x - 4) = 5 - 8x.$$

2. 求 22.1 节中问题 1 的答案.

### 22.2.3 因式分解法



**问题3** 根据物理学规律，如果把一个物体从地面以  $10 \text{ m/s}$  的速度竖直上抛，那么经过  $x \text{ s}$  物体离地面的高度（单位：m）为

$$10x - 4.9x^2.$$

你能根据上述规律求出物体经过多少秒落回地面吗（精确到  $0.01 \text{ s}$ ）？

设物体经过  $x \text{ s}$  落回地面，这时它离地面的高度为 0，即

$$10x - 4.9x^2 = 0. \quad ①$$



#### 思 考

除配方法或公式法以外，能否找到更简单的方法解方程①？

如果  $a \cdot b = 0$ ，那么  $a=0$  或  $b=0$ .

方程①的右边为 0，左边可以因式分解，得

$$x(10 - 4.9x) = 0.$$

于是得

$$x = 0 \text{ 或 } 10 - 4.9x = 0, \quad ②$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{100}{49} \approx 2.04.$$

上述解中， $x_2 \approx 2.04$  表示物体约在  $2.04 \text{ s}$  时落回地面，而  $x_1 = 0$  表示物体被上抛离开地面的时刻，即在  $0 \text{ s}$  时物体被抛出，此刻物体的高度是  $0 \text{ m}$ .



以上解方程①的方法是如何使二次方程降为一次的？

可以发现，上述解法中，由①到②的过程，不是用开平方降次，而是先因式分解使方程化为两个一次式的乘积等于0的形式，再使这两个一次式分别等于0，从而实现降次。这种解法叫做**因式分解法**。

**例3** 解下列方程：

(1)  $x(x-2)+x-2=0$ ；

(2)  $5x^2-2x-\frac{1}{4}=x^2-2x+\frac{3}{4}$ 。

**解：**(1) 因式分解，得

$$(x-2)(x+1)=0.$$

于是得

$$x-2=0 \text{ 或 } x+1=0,$$

$$x_1=2, x_2=-1.$$

(2) 移项、合并同类项，得

$$4x^2-1=0.$$

因式分解，得

$$(2x+1)(2x-1)=0.$$

于是得

$$2x+1=0 \text{ 或 } 2x-1=0,$$

$$x_1=-\frac{1}{2}, x_2=\frac{1}{2}.$$

可以试用多种方法解本例中的两个方程。

### 归 纳

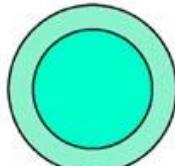
配方法要先配方，再降次；通过配方法可以推出求根公式，公式法直接利用求根公式；因式分解法要先使方程一边为两个一次因式相乘，另一边为0，再分别使各一次因式等于0。配方法、公式法适用于所有一元二次方程，因式分解法用于某些一元二次方程。总之，解一元二次方程的基本思路是：将二次方程化为一次方程，即降次。

练习

1. 解下列方程:

(1)  $x^2 + x = 0$ ; (2)  $x^2 - 2\sqrt{3}x = 0$ ;  
(3)  $3x^2 - 6x = -3$ ; (4)  $4x^2 - 121 = 0$ ;  
(5)  $3x(2x+1) = 4x+2$ ; (6)  $(x-4)^2 = (5-2x)^2$ .

2. 把小圆形场地的半径增加 5 m 得到大圆形场地, 场地面积增加了一倍, 求小圆形场地的半径.



(第 2 题)

习题 22.2

复习巩固 ►►

1. 解下列方程:

(1)  $36x^2 - 1 = 0$ ; (2)  $4x^2 = 81$ ;  
(3)  $(x+5)^2 = 25$ ; (4)  $x^2 + 2x + 1 = 4$ .

2. 填空:

(1)  $x^2 + 6x + \underline{\quad} = (x + \underline{\quad})^2$ ;  
(2)  $x^2 - x + \underline{\quad} = (x - \underline{\quad})^2$ ;  
(3)  $4x^2 + 4x + \underline{\quad} = (2x + \underline{\quad})^2$ ;  
(4)  $x^2 - \frac{2}{5}x + \underline{\quad} = (x - \underline{\quad})^2$ .

3. 用配方法解下列方程:

(1)  $x^2 + 10x + 16 = 0$ ; (2)  $x^2 - x - \frac{3}{4} = 0$ ;  
(3)  $3x^2 + 6x - 5 = 0$ ; (4)  $4x^2 - x - 9 = 0$ .

4. 用公式法解下列方程:

(1)  $x^2 + x - 6 = 0$ ; (2)  $x^2 - \sqrt{3}x - \frac{1}{4} = 0$ ;  
(3)  $x^2 + 4x + 8 = 2x + 11$ ; (4)  $x(x-4) = 2 - 8x$ ;  
(5)  $x^2 + 2x = 0$ ; (6)  $x^2 + 2\sqrt{5}x + 10 = 0$ .

5. 用因式分解法解下列方程:
- (1)  $3x^2 - 12x = -12$ ;
  - (2)  $4x^2 - 144 = 0$ ;
  - (3)  $3x(x-1) = 2(x-1)$ ;
  - (4)  $(2x-1)^2 = (3-x)^2$ .
6. 一个直角三角形的两条直角边相差 5 cm, 面积是 7 cm<sup>2</sup>, 求斜边的长 (精确到 0.1 cm).
7. 参加一次商品交易会的每两家公司之间都签订了一份合同, 所有公司共签订了 45 份合同, 共有多少家公司参加商品交易会?



### 综合运用 ►►

8. 用公式法和因式分解法解方程

$$x^2 - 6x + 9 = (5 - 2x)^2.$$

9. 有一根 20 m 长的绳, 怎样用它围成一个面积为 24 m<sup>2</sup> 的矩形?

10. 向阳村 2001 年的人均收入为 1 200 元, 2003 年的人均收入为 1 850 元, 求人均收入的年平均增长率.

### 拓广探索 ►►

11. 一个凸多边形共有 20 条对角线, 它是几边形? 是否存在有 18 条对角线的多边形? 如果存在, 它是几边形? 如果不存在, 说明得出结论的道理.
12. 无论  $p$  取何值, 方程  $(x-3)(x-2)-p^2=0$  总有两个不等的实数根吗? 给出答案并说明理由.



### 阅读与思考

选学

### 黄金分割数

本章引言中有一个关于人体雕塑的问题, 要使雕像的上部(腰以上)与下部(腰以下)的高度比, 等于下部与全部的高度比, 这个高度比应是多少?

把上面的问题一般化, 如图 1, 在线段  $AB$  上找一个点  $C$ , 使  $AC : CB = CB : AB$ ,

即  $CB^2 = AC \cdot AB$ . 为简单起见, 设  $AB=1$ ,  $CB=x$ , 则  $AC=1-x$ . 列方程

$$x^2 = 1-x, \text{ 即}$$

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

解方程, 得

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$



图 1

根据问题的实际意义, 取  $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$ , 这个值就是上面问题中的高度比.

人们把  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$  这个数叫做黄金分割数. 如果把一条线段分为两部分, 使其中较长一段

与整个线段的比是黄金分割数, 那么较短一段与较长一段的比也是黄金分割数.

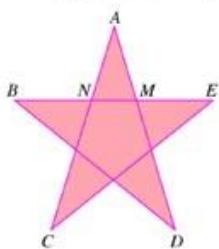


图 2



图 3

五角星是常见的图案. 如图 2, 在正五角星中存在黄金分割数, 可以证明其中

$$\frac{MN}{NB} = \frac{BN}{BM} = \frac{BM}{BE} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

长期以来, 很多人认为黄金分割数是一个很特别的数. 一些美术家认为: 如果人的上、下身长之比是黄金分割数, 那么可以增加美感. 据说, 一些名画和雕塑(如图 3 的维纳斯像)都符合这个比. 一位科学家曾提出:

在一棵树的生长过程中,  $\frac{n \text{ 年后的树枝数目}}{n+1 \text{ 年后的树枝数目}}$  是黄金分割数.

优选法是一种具有广泛应用价值的数学方法, 著名数学家华罗庚曾为普及它作出重要贡献. 优选法中有一种 0.618 法应用了黄金分割数. 例如, 在一种试验中, 温度的变化范围是  $0^\circ\text{C} \sim 10^\circ\text{C}$ , 我们要寻找在哪个温度时试验效果最佳. 为此, 可以先找出温度变化范围的黄金分割点, 考察  $10 \times 0.618 = 6.18^\circ\text{C}$  时的试验效果, 再考察  $10 \times (1 - 0.618) = 3.82^\circ\text{C}$  时的试验效果, 比较两者, 选优去劣. 然后在缩小的温度变化范围继续这样寻找, 直至选出最佳温度.



图 4

著名数学家华罗庚在普及优选法

## 22.3 实际问题与一元二次方程

同一元一次方程、二元一次方程（组）等一样，一元二次方程也可以作为反映某些实际问题中数量关系的数学模型，本节继续讨论如何利用一元二次方程分析解决实际问题。

### 探究1



有一人患了流感，经过两轮传染后共有 121 人患了流感，每轮传染中平均一个人传染了几个人？

**分析：**设每轮传染中平均一个人传染了  $x$  个人。  
开始有一人患了流感，第一轮的传染源就是这个人，他传染了  $x$  个人，用代数式表示，第一轮后共有 \_\_\_\_\_ 人患了流感；第二轮传染中，这些人中的每个人又传染了  $x$  个人，用代数式表示，第二轮后共有 \_\_\_\_\_ 人患了流感。

列方程

$$1+x+x(1+x)=121.$$

解方程，得

$$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}, x_2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

平均一个人传染了 \_\_\_\_\_ 个人。

通过对这个问题的探究，你对类似的传播问题中的数量关系有新认识吗？



### 思 考

如果按照这样的传染速度，三轮传染后有多少人患流感？

### 探究2

两年前生产1吨甲种药品的成本是5 000元，生产1吨乙种药品的成本是6 000元，随着生产技术的进步，现在生产1吨甲种药品的成本是3 000元，生产1吨乙种药品的成本是3 600元。哪种药品成本的年平均下降率较大？

**分析：**容易求出，甲种药品成本的年平均下降额（元）为 $(5000 - 3000) \div 2 = 1000$ ，乙种药品成本的年平均下降额（元）为 $(6000 - 3600) \div 2 = 1200$ ，显然，乙种药品成本的年平均下降额较大。但是，年平均下降额（元）不等同于年平均下降率（百分数）。

设甲种药品成本的年平均下降率为 $x$ ，则一年后甲种药品成本为 $5000(1-x)$ 元，两年后甲种药品成本为 $5000(1-x)^2$ 元，于是有

$$5000(1-x)^2 = 3000.$$

解方程，得

$$x_1 \approx 0.225, x_2 \approx 1.775.$$

根据问题的实际意义，甲种药品的成本年平均下降率约为22.5%。

乙种药品成本的年平均下降率是多少？请比较两种药品成本的年平均下降率。

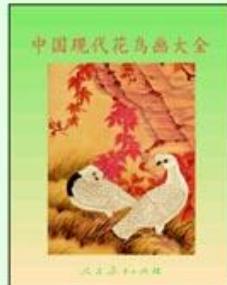
根据问题的实际  
意义，应选择哪个根？  
为什么？

### 思考

经过计算，你能得出什么结论？成本下降额较大的药品，它的成本下降率一定也较大吗？应怎样全面地比较几个对象的变化状况？

### 探究3

如图 22.3-1，要设计一本书的封面，封面长 27 cm，宽 21 cm，正中央是一个与整个封面长宽比例相同的矩形。如果要使四周的彩色边衬所占面积是封面面积的四分之一，上、下边衬等宽，左、右边衬等宽，应如何设计四周边衬的宽度（精确到 0.1 cm）？



22.3-1

**分析：**封面的长宽之比为  $27 : 21 = 9 : 7$ ，中央矩形的长宽之比也应是  $9 : 7$ ，由此判断上下边衬与左右边衬的宽度之比也是  $9 : 7$ 。

设上、下边衬的宽均为  $9x$  cm，左、右边衬的宽均为  $7x$  cm，则中央矩形的长为  $(27 - 18x)$  cm，宽为 \_\_\_\_\_ cm。

要使四周的彩色边衬所占面积是封面面积的四分之一，则中央矩形的面积是封面面积的四分之三。于是可列出方程

$$(27 - 18x)(21 - 14x) = \frac{3}{4} \times 27 \times 21.$$

整理，得

$$16x^2 - 48x + 9 = 0.$$

解方程，得

$$x = \frac{6 \pm 3\sqrt{3}}{4}.$$

方程的哪个根合乎实际意义？为什么？

上、下边衬的宽均为\_\_\_\_\_ cm，左、右边衬的宽均为\_\_\_\_\_ cm。



### 思 考

如果换一种设未知数的方法，是否可以更简单地解决上面的问题？请你试试。

### 探究4

一辆汽车以  $20 \text{ m/s}$  的速度行驶，司机发现前方路面有情况，紧急刹车后汽车又滑行  $25 \text{ m}$  后停车。（1）从刹车到停车用了多少时间？（2）从刹车到停车平均每秒车速减少多少？（3）刹车后汽车滑行到  $15 \text{ m}$  时约用了多少时间（精确到  $0.1 \text{ s}$ ）？



**分析：**（1）已知刹车后滑行路程为  $25 \text{ m}$ ，如果知道滑行的平均速度，则根据路程、速度、时间三者的

关系，可求出滑行时间。为使问题简单化，不妨假设车速从  $20 \text{ m/s}$  到  $0 \text{ m/s}$  是随时间均匀变化的。这段时间内的平均车速等于最大速度与最小速度的平均值，即  $\frac{20+0}{2}=10(\text{m/s})$ ，于是从刹车到停车的时间为

行驶路程  $\div$  平均车速，

即

$$25 \div 10 = 2.5(\text{s}).$$

(2) 从刹车到停车平均每秒车速减少值为  
(初速度 - 末速度)  $\div$  车速变化时间，

即

$$\frac{20-0}{2.5} = 8(\text{m/s}).$$

(3) 设刹车后汽车行驶到  $15 \text{ m}$  用了  $x \text{ s}$ ，由(2)可知，这时车速为  $(20-8x)\text{m/s}$ 。这段路程内的平均车速为  $\frac{20+(20-8x)}{2} \text{ m/s}$ ，即  $(20-4x) \text{ m/s}$ 。由

速度  $\times$  时间 = 路程，得

$$(20-4x)x=15.$$

解方程，得

$$x=\frac{5\pm\sqrt{10}}{2}.$$

刹车后汽车行驶到  $15 \text{ m}$  时约用了 \_\_\_\_\_ s。

根据问题的实  
际意义，应如何选  
择正确答案？

### 思考

刹车后汽车行驶到  $20 \text{ m}$  时约用了多少时间  
(精确到  $0.1 \text{ s}$ )？

### 习题22.3

#### 复习巩固

1. 解下列方程:

(1)  $x^2 + 10x + 21 = 0$ ; (2)  $x^2 - x - 1 = 0$ ;  
(3)  $3x^2 + 6x - 4 = 0$ ; (4)  $3x(x+1) = 3x + 3$ ;  
(5)  $4x^2 - 4x + 1 = x^2 + 6x + 9$ ; (6)  $7x^2 - \sqrt{6}x - 5 = 0$ .

2. 两个相邻偶数的积是 168, 求这两个偶数.

3. 一个直角三角形的两条直角边的和是 14 cm, 面积是 24 cm<sup>2</sup>, 求斜边的长.

#### 综合运用

4. 某种植物的主干长出若干数目的支干, 每个支干又长出同样数目的小分支, 主干、支干和小分支的总数是 91, 每个支干长出多少小分支?



5. 一个菱形两条对角线的和是 10 cm, 面积是 12 cm<sup>2</sup>, 求菱形的周长 (精确到 0.1 cm).

6. 参加一次足球联赛的每两队之间都进行两次比赛, 共要比赛 90 场, 共有多少个队参加比赛?

7. 青山村种的水稻 2001 年平均每公顷产 7 200 kg, 2003 年平均每公顷产 8 250 kg, 求水稻每公顷产量的年平均增长率.

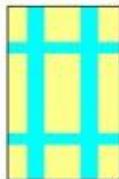
8. 要为一幅长 29 cm, 宽 22 cm 的照片配一个镜框, 要求镜框的四条边宽度相等, 且镜框所占面积为照片面积的四分之一, 镜框边的宽度应是多少 (精确到 0.1 cm)?

9. 一个小球以 5 m/s 的速度开始向前滚动, 并且均匀减速, 滚动 10 m 后小球停下来. (1) 小球滚动了多少时间? (2) 平均每秒小球的运动速度减少多少? (3) 小球滚动到 5 m 时约用了多少时间 (精确到 0.1 s)?

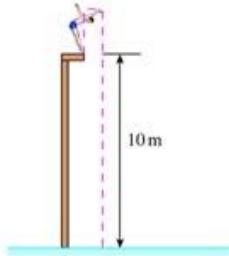
#### 拓广探索

10. 如图, 要设计一幅宽 20 cm、长 30 cm 的图案, 其中有两横两竖的彩条, 横、竖

彩条的宽度比为 2 : 3，如果要使彩条所占面积是图案面积的四分之一，应如何设计彩条的宽度（精确到 0.1 cm）？



(第 10 题)



(第 11 题)

11. 一个跳水运动员从距水面 10 m 高的跳台向上跳起 0.8 m，最后以 14 m/s 的向下运动速度入水。

- (1) 运动员从起跳后的最高点到入水用了多少时间？
- (2) 平均每秒运动员下落速度的变化量是多少（精确到 0.1 m/s）？
- (3) 运动员从起跳后的最高点到离水面 5 m 时用了多少时间（精确到 0.1 s）？



## 观察与猜想

选学

### 发现一元二次方程根与系数的关系

解方程  $x^2 + 6x - 16 = 0$ ，得它的两个根  $x_1 = 2$ ， $x_2 = -8$ ，你能看出这两个根与方程的系数 6，-16 有什么关系吗？

你会发现， $x_1 + x_2 = -6$ ，这个和是方程中一次项系数 6 的相反数； $x_1 x_2 = -16$ ，这个积是方程中的常数项。这其中有一般规律吗？

不妨再对几个二次项系数是 1 的一元二次方程进行观察，例如解方程  $x^2 - 3x + 2 = 0$ ，得出根  $x_1 = 1$ ， $x_2 = 2$  后，计算  $x_1 + x_2 = 3$ ， $x_1 x_2 = 2$ ，观察所得结果与相应方程的系数，你有什么发现？

通过上面的观察可以猜想：对任意一元二次方程  $x^2 + mx + n = 0$  ( $m$ ， $n$  是系数)，方程的两个根  $x_1$ ， $x_2$  和系数  $m$ ， $n$  可能有如下关系

$$x_1 + x_2 = -m,$$

$$x_1 x_2 = n.$$

上述猜想是否正确呢？利用求根公式可知，当  $m^2 - 4n \geq 0$  时，方程  $x^2 + mx + n = 0$  的两根为

$$x_1 = \frac{-m + \sqrt{m^2 - 4n}}{2}, \quad x_2 = \frac{-m - \sqrt{m^2 - 4n}}{2}.$$

于是有

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-m + \sqrt{m^2 - 4n}}{2} + \frac{-m - \sqrt{m^2 - 4n}}{2} = \frac{-2m}{2} = -m, \\ x_1 x_2 &= \frac{-m + \sqrt{m^2 - 4n}}{2} \cdot \frac{-m - \sqrt{m^2 - 4n}}{2} \\ &= \frac{(-m)^2 - (\sqrt{m^2 - 4n})^2}{4} = \frac{4n}{4} = n. \end{aligned}$$

这证明上述猜想正确。这里发现的关系对研究一元二次方程很有用。

如果一元二次方程的二次项系数不是 1，你又能发现什么规律？不妨利用求根公式，探索任意一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) 的两根与系数  $a$ ,  $b$ ,  $c$  有什么关系。

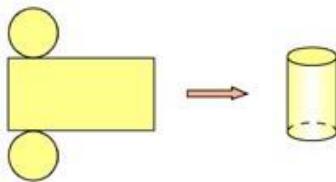


## 数学活动

### 活动1 作圆柱

作一个圆柱，使它的高等于  $10\text{ cm}$ ，表面积等于  $48\pi\text{ cm}^2$ .

[提示：先作出符合要求的圆柱展开图，再将展开图围成圆柱。]



### 活动2 围矩形

用一根  $120\text{ cm}$  的细绳分别围出满足下列条件的矩形：

- (1) 面积为  $500\text{ cm}^2$ ；
- (2) 面积为  $675\text{ cm}^2$ ；
- (3) 面积为  $900\text{ cm}^2$ .

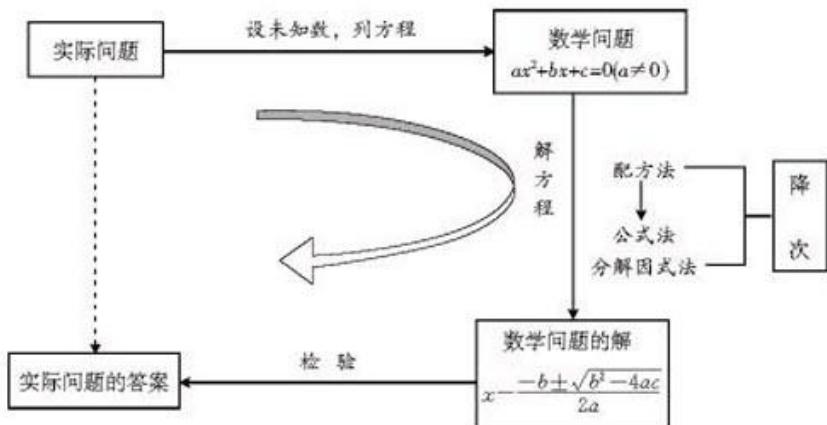
试一试，能围出面积大于  $900\text{ cm}^2$  的矩形吗？你能解释你的结论吗？

### 活动3 计算变化率

查阅有关资料（报刊杂志、统计年鉴、网络等），根据某两个时间段（例如两年、两月等）前后的某项指标（例如国内生产总值、森林面积等）的统计数据，计算平均每个时间段内这项指标的变化率。

## 小结

### 一、本章知识结构图



### 二、回顾与思考

1. 比较你所学过的各种整式方程, 说明它们的未知数的个数与次数有什么区别. 你能写出各种方程的一般形式吗?
2. 一元二次方程有哪些解法? 各种解法在什么情况下最适用? 体会降次在解一元二次方程中的作用.
3. 求根公式与配方法有什么关系? 什么情况下一元二次方程有实数根?
4. 举例说明以一元二次方程为数学模型解决实际问题的过程.

## 复习题22

### 复习巩固

1. 解下列方程：

(1)  $36x^2 - 1 = 0$ ; (2)  $4x^2 + 12x + 9 = 81$ ;  
(3)  $x^2 - 7x - 1 = 0$ ; (4)  $2x^2 + 3x = 3$ ;  
(5)  $x^2 - 2x + 1 = 25$ ; (6)  $x(2x - 5) = 4x - 10$ ;  
(7)  $x^2 + 5x + 7 = 3x + 11$ ; (8)  $1 - 8x + 16x^2 = 2 - 8x$ .

2. 两数的和为 8，积为 9.75，求这两数。

3. 一个矩形的两条邻边相差 3 cm，面积是 4 cm<sup>2</sup>，求对角线的长（精确到 0.1 cm）。

### 综合运用

4. 一个直角梯形的下底比上底大 2 cm，高比上底小 1 cm，面积等于 8 cm<sup>2</sup>，请画出这个梯形。

5. 一个长方体的长与宽的比为 5 : 2，高为 5 cm，表面积为 40 cm<sup>2</sup>，请画出这个长方体的展开图。

6. 要组织一次篮球联赛，赛制为单循环形式（每两队之间都赛一场），计划安排 15 场比赛，应邀请多少个球队参加比赛？

7. 如图，利用一面墙（墙的长度不限），用 20 m 长的篱笆，怎样围成一个面积为 50 m<sup>2</sup> 的矩形场地？



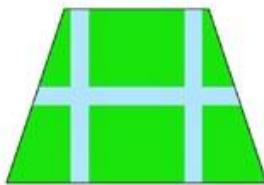
（第 7 题）

8. 银行经过最近的两次降息，使一年期存款的年利率由 2.25% 降至 1.98%，平均每次降息的百分率是多少（精确到 0.01%）？

9. 一物体以 10 m/s 的速度开始在冰面上滑动，并且均匀减速，滑动 10 m 后物体停下来。（1）物体滑动了多少时间？（2）物体滑动到 8 m 时约用了多少时间（精确到 0.1 s）？

拓广探索 ▶▶

10. 如图,要设计一个等腰梯形的花坛,花坛上底长100 m,下底长180 m,上下底相距80 m,在两腰中点连线处有一条横向甬道,上下底之间有两条纵向甬道,各甬道的宽度相等,甬道的面积是花坛总面积的六分之一,请画出花坛的设计图.



(第10题)

11. 某村为增加蔬菜的种植面积,修建了一些蔬菜大棚.平均修建每公顷大棚要用的支架、塑料膜等材料的费用为27 000元,此外还要购置喷灌设备,这项费用(元)与大棚面积(公顷)的平方成正比,比例系数为9 000.每公顷大棚的年平均经济收益为75 000元,这个村一年中由于修建蔬菜大棚而增加的收益(扣除修建费用后)为60 000元.

- (1) 这个村修建了多少公顷蔬菜大棚?
- (2) 一年中修建2公顷大棚与修建 $\frac{10}{3}$ 公顷大棚的效益有什么差别?
- (3) 如果修建3公顷大棚收益如何?
- (4) 修建大棚的面积越大收益也一定越大吗?

