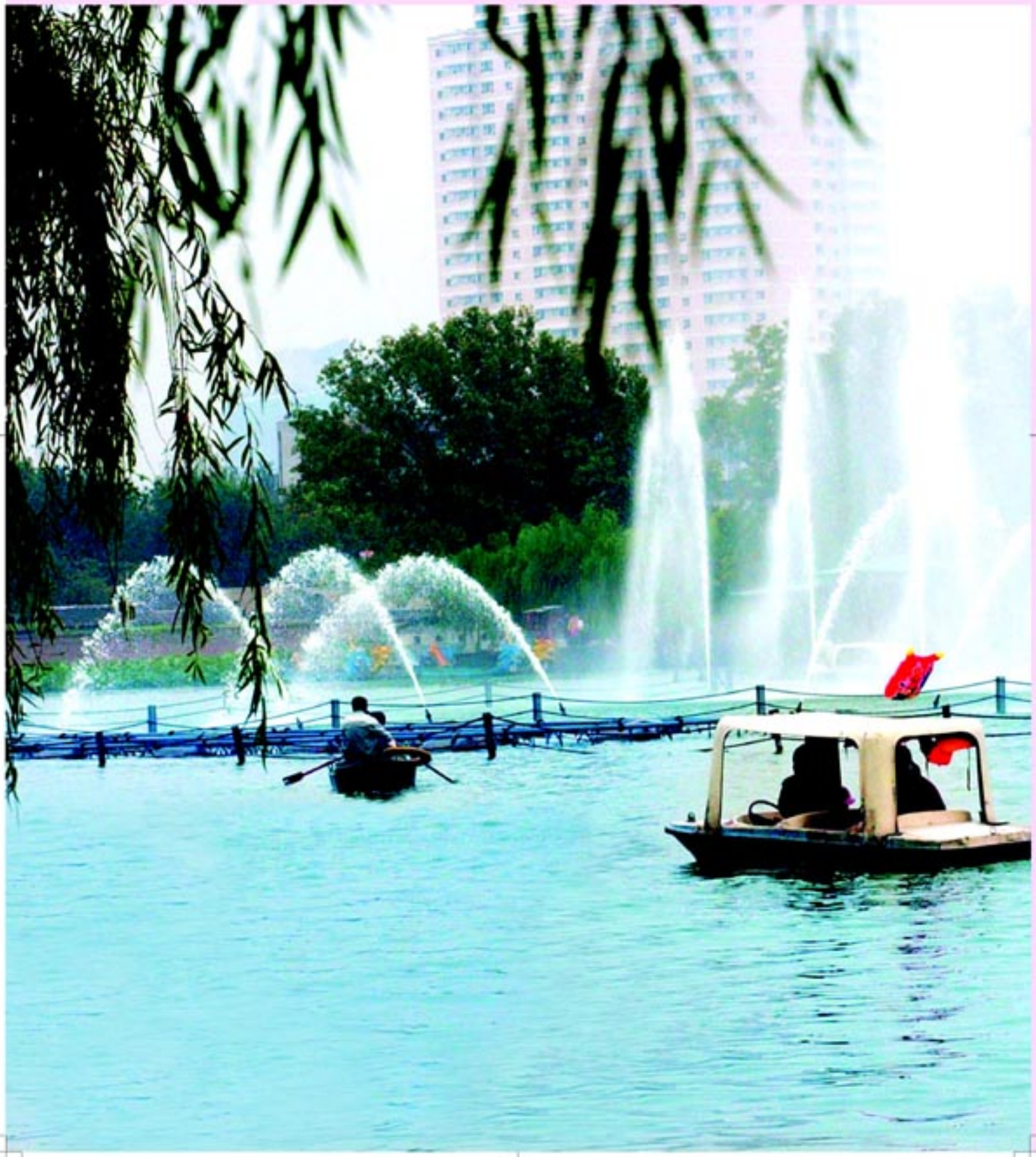
目　录

第二十六章　二次函数



26

我们知道，函数是描述变化的一种数学工具，用一次函数与反比例函数可以表示某些问题中变量之间的关系，并解决一些实际问题．我们再来看另一些问题中变量之间的关系．

如果改变正方体的棱长 x，那么正方体的表面积 y 会随之改变，y 与 x 之间有什么关系？

物体自由下落过程中，下落的距离 s 随下落时间 t 的变化而变化，s 与 t 之间有什么关系？

再看章前图，从喷头飞出的水珠，在空中走过一条曲线后落到草地上．在这条曲线的各个位置上，水珠的竖直高度 h 与它距离喷头的水平距离 x 之间有什么关系？

上面问题中变量之间的关系可以用哪一种函数来表示？这种函数有哪些性质？它的图象是什么样的？它与以前学习的函数、方程等有哪些联系？

通过学习本章，你不仅能回答上述问题，并且能体会如何用这种函数分析和解决某些实际问题，从而进一步提高对函数的认识和运用能力．

26.1 二次函数

我们看引言中正方体的表面积的问题.

正方体的六个面是全等的正方形（图 26.1-1），设正方体的棱长为 x，表面积为 y，显然对于 x 的每一个值，y 都有一个对应值，即 y 是 x 的函数，它们的具体关系可以表示为

$$y=6x^2. \quad ①$$

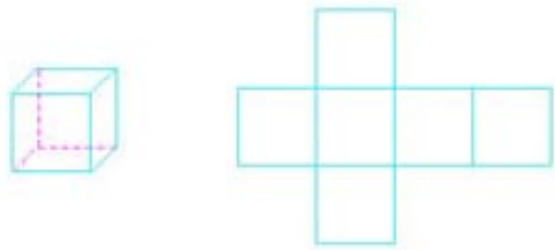


图 26.1-1

我们再来看几个问题.

图 26.1-2

问题 1 多边形的对角线数 d 与边数 n 有什么关系？

由图 26.1-2 可以想出，如果多边形有 n 条边，那么它有____个顶点. 从一个顶点出发，连接与这点不相邻的各顶点，可以作_____条对角线.

因为像线段 MN 与 NM 那样，连接相同两顶点的对角线是同一条对角线，所以多边形的对角线总数

$$d=\frac{1}{2}n(n-3),$$

即

$$d=\frac{1}{2}n^2-\frac{3}{2}n. \quad ②$$

②式表示了多边形的对角线数 d 与边数 n 之间的关系，对于 n 的每一个值，d 都有一个对应值，即 d 是 n 的函数.

问题 2　某工厂一种产品现在的年产量是 20 件，计划今后两年增加产量. 如果每年都比上一年的产量增加 x 倍，那么两年后这种产品的产量 y 将随计划所定的 x 的值而确定，y 与 x 之间的关系应怎样表示？

这种产品的原产量是 20 件，一年后的产量是_____件，再经过一年后的产量是_____件，即两年后的产量为

$$y=20(1+x)^2,$$

即

$$y=20x^2+40x+20. \qquad ③$$

③式表示了两年后的产量 y 与计划增产的倍数 x 之间的关系，对于 x 的每一个值，y 都有一个对应值，即 y 是 x 的函数.

观 察

函数①②③有什么共同点？

在上面的问题中，函数都是用自变量的二次式表示的. 一般地，形如

$$y=ax^2+bx+c\ (a,\ b,\ c\text{ 是常数},\ a\neq 0)$$

的函数，叫做**二次函数**（quadratic function）. 其中，x 是自变量，a，b，c 分别是函数表达式的二次项系数、一次项系数和常数项.

现在我们学习过的函数有：一次函数 $y=ax+b(a\neq 0)$，其中包括正比例函数 $y=kx(k\neq 0)$，反比例

函数$y=\frac{k}{x}(k\neq0)$和二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$.

可以发现，这些函数的名称都反映了函数表达式与自变量的关系.

练习

1. 一个圆柱的高等于底面半径，写出它的表面积 S 与半径 r 之间的关系式.
2. n 支球队参加比赛，每两队之间进行一场比赛. 写出比赛的场次数 m 与球队数 n 之间的关系式.

思考

一次函数的图象是一条直线，反比例函数的图象是双曲线，二次函数的图象是什么形状呢？通常怎样画一个函数的图象？

结合图象讨论性质是数形结合地研究函数的重要方法. 我们将从最简单的二次函数开始逐步深入地讨论一般二次函数的图象和性质.

我们先来画最简单的二次函数 $y=x^2$ 的图象.

在 $y=x^2$ 中自变量 x 可以是任意实数，列表表示几组对应值（填表）：

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=x^2$	…								…

还记得如何用描点法画一个函数的图象吗？

根据表中 x，y 的数值在坐标平面中描点(x, y)（图 26.1-3），再用平滑曲线顺次连接各点，就得到 $y=x^2$的图象（图 26.1-4）.

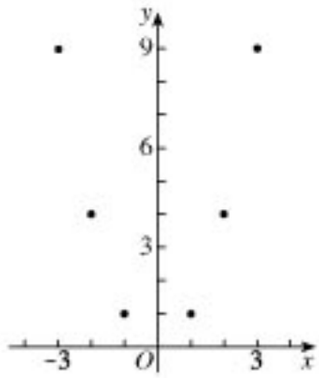


图 26.1-3

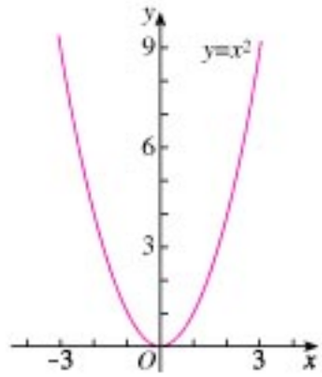


图 26.1-4

可以看出，二次函数 $y=x^2$ 的图象是一条曲线，它的形状类似于投篮球或掷铅球时球在空中所经过的路线，只是这条曲线开口向上．这条曲线叫做抛物线 $y=x^2$．实际上，二次函数的图象都是抛物线，它们的开口或者向上或者向下．一般地，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象叫做抛物线 $y=ax^2+bx+c$．

还可以看出，y 轴是抛物线 $y=x^2$ 的对称轴，抛物线 $y=x^2$ 与它的对称轴的交点（0，0）叫做抛物线 $y=x^2$ 的顶点，它是抛物线 $y=x^2$ 的最低点．实际上，每条抛物线都有对称轴，抛物线与对称轴的交点叫做抛物线的顶点．顶点是抛物线的最低点或最高点．

由于点 (m, m^2) 和它关于 y 轴的对称点 $(-m, m^2)$ 都在抛物线 $y=x^2$ 上，所以抛物线 $y=x^2$ 关于 y 轴对称．

例 1 在同一直角坐标系中，画出函数 $y=\frac{1}{2}x^2$，$y=2x^2$ 的图象．

解： 分别填表，再画出它们的图象(图 26.1-5)．

x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
$y=\frac{1}{2}x^2$											

x	…	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	…
$y=2x^2$											

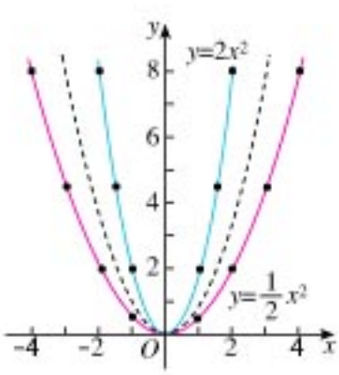


图 26.1-5

观 察

函数 $y=\frac{1}{2}x^2$，$y=2x^2$ 的图象与函数 $y=x^2$（图 26.1-5 中的虚线图形）的图象相比，有什么共同点和不同点？

探究

画出函数 $y=-x^2$，$y=-\frac{1}{2}x^2$，$y=-2x^2$ 的图象，并考虑这些抛物线有什么共同点和不同点.

你画出的图象与图 26.1-6 相同吗？

对比抛物线 $y=x^2$ 和 $y=-x^2$，它们关于 x 轴对称吗？一般地，抛物线 $y=ax^2$ 和 $y=-ax^2$ 呢？

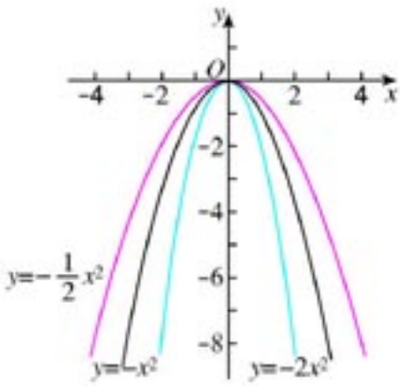


图 26.1-6

归 纳

一般地，抛物线 $y=ax^2$ 的对称轴是 y 轴，顶点是原点. 当 $a>0$ 时，抛物线的开口向上，顶点是抛物线的最低点，a 越大，抛物线的开口越小；当 $a<0$ 时，抛物线的开口向____，顶点是抛物线的最____点，a 越大，抛物线的开口越____.

例 2 在同一直角坐标系中，画出二次函数 $y=x^2+1$，$y=x^2-1$ 的图象.

解： 先列表：

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=x^2+1$									
$y=x^2-1$									

然后描点画图，得 $y=x^2+1$，$y=x^2-1$ 的图象（图 26.1-7）.

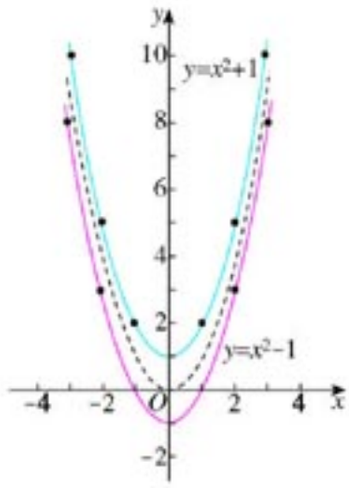


图 26.1-7

讨论

(1) 抛物线 $y=x^2+1$，$y=x^2-1$ 的开口方向、对称轴、顶点各是什么？

(2) 抛物线 $y=x^2+1$，$y=x^2-1$ 与抛物线 $y=x^2$ 有什么关系？

可以发现，把抛物线 $y=x^2$ 向上平移 1 个单位，就得到抛物线 $y=x^2+1$；把抛物线 $y=x^2$ 向下平移1 个单位，就得到抛物线 $y=x^2-1$.

思考

把抛物线 $y=2x^2$ 向上平移 5 个单位，会得到哪条抛物线？向下平移 3.4 个单位呢？

练习

在同一直角坐标系中，画出下列二次函数的图象：

$$y=\frac{1}{2}x^2,\ y=\frac{1}{2}x^2+2,\ y=\frac{1}{2}x^2-2.$$

观察三条抛物线的相互关系，并分别指出它们的开口方向、对称轴及顶点.

你能说出抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+k$ 的开口方向、对称轴及顶点吗？它与抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 有什么关系？

探究

画出二次函数 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$，$y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的图象，并考虑它们的开口方向、对称轴和顶点.

先列表：

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$									
$y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$									

然后描点画图，得 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$，$y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$

的图象（图 26.1-8）.

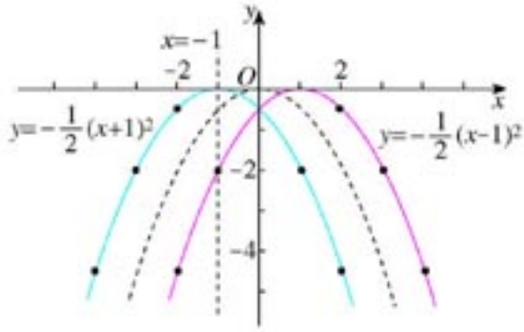


图 26.1-8

可以看出，抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$ 的开口向下，对称轴是经过点$(-1，0)$且与 x 轴垂直的直线，我们把它记作 $x=-1$，顶点是$(-1，0)$；抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的开口向____，对称轴是_____，顶点是_____.

讨论

抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$，$y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$ 与抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 有什么关系？

可以发现，把抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 向左平移 1 个单位，就得到抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$；把抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 向右平移 1 个单位，就得到抛物线$y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$.

练习

在同一直角坐标系内画出下列二次函数的图象：

$$y=\frac{1}{2}x^2,\ y=\frac{1}{2}(x+2)^2,\ y=\frac{1}{2}(x-2)^2$$

观察三条抛物线的相互关系，并分别指出它们的开口方向、对称轴及顶点.

例 3 画出函数 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2-1$ 的图象，指出它的开口方向、对称轴及顶点. 抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 经过怎样的变换可以得到抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2-1$?

解： 函数 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2-1$ 的图象如图 26.1-9 所示.

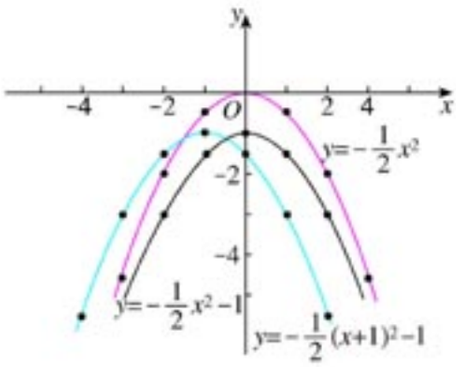


图 26.1-9

还有其他平移方法吗?

抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2-1$ 的开口方向向下、对称轴是 $x=-1$，顶点是$(-1,\ -1)$.

把抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 向下平移 1 个单位，再向左平移 1 个单位，就得到抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2-1$.

归纳

一般地，抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 与 $y=ax^2$ 形状相同，位置不同．把抛物线 $y=ax^2$ 向上（下）向左（右）平移，可以得到抛物线 $y=a(x-h)^2+k$．平移的方向、距离要根据 h，k 的值来决定．

抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 有如下特点：

(1) 当 $a>0$ 时，开口向上；当 $a<0$ 时，开口向下；

(2) 对称轴是直线 $x=h$；

(3) 顶点坐标是 (h, k)．

我们来看一个与章前图有关的问题．

例 4 要修建一个圆形喷水池，在池中心竖直安装一根水管，在水管的顶端安一个喷水头，使喷出的抛物线形水柱在与池中心的水平距离为 1 m 处达到最高，高度为 3 m，水柱落地处离池中心 3 m，水管应多长？

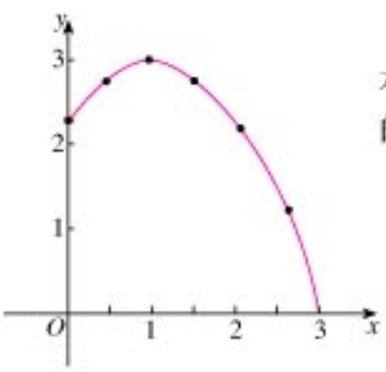


图 26.1-10

解： 如图 26.1-10 建立直角坐标系，点 (1，3) 是图中这段抛物线的顶点，因此可设这段抛物线对应的函数是

$$y=a(x-1)^2+3 \quad (0\leqslant x\leqslant 3).$$

由这段抛物线经过点(3，0)可得

$$0=a(3-1)^2+3,$$

解得

$$a=-\frac{3}{4}.$$

因此

$$y=-\frac{3}{4}(x-1)^2+3 \quad (0\leqslant x\leqslant 3).$$

当 $x=0$ 时，$y=2.25$，也就是说，水管应长 2.25 m．

练习

说出下列抛物线的开口方向、对称轴及顶点：

(1) $y=2(x+3)^2+5$；　　(2) $y=-3(x-1)^2-2$；

(3) $y=4(x-3)^2+7$；　　(4) $y=-5(x+2)^2-6$.

下面通过画 $y=\frac{1}{2}x^2-6x+21$ 的图象，讨论一般地怎样画二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的图象.

思考

我们知道，像 $y=a(x-h)^2+k$ 这样的函数，容易确定相应抛物线的顶点为(h, k)，二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2-6x+21$ 也能化成这样的形式吗？

怎样平移抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 得到抛物线 $y=\frac{1}{2}(x-6)^2+3$？

配方可得：

$$y=\frac{1}{2}x^2-6x+21$$
$$=\frac{1}{2}(x-6)^2+3.$$

由此可知，抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-6x+21$ 的顶点是点(6，3)，对称轴是直线 $x=6$.

接下来，利用图象的对称性列表（请填表）：

x	…	3	4	5	6	7	8	9	…
$y=-\frac{1}{2}(x-6)^2+3$									

然后描点画图，得到 $y=\frac{1}{2}(x-6)^2+3$ 的图象(图 26.1-11).

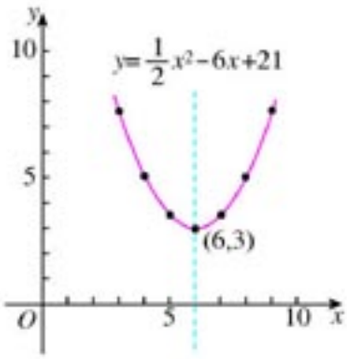


图 26.1-11

这是确定抛物线顶点与对称轴的公式，不要求掌握公式推导过程和记忆公式.

归纳

一般地，我们可以用配方求抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的顶点与对称轴.

$$y=ax^2+bx+c$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a},$$

因此，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴是 $x=-\frac{b}{2a}$，顶点坐标是 $\left(-\frac{b}{2a},\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

探究

用总长为 60 m 的篱笆围成矩形场地，矩形面积 S 随矩形一边长 l 的变化而变化. 当 l 是多少时，场地的面积 S 最大？

分析： 先写出 S 与 l 的函数关系式，再求出使 S 最大的 l 值.

矩形场地的周长是 60 m，一边长为 l，则另一边长为 $\left(\frac{60}{2}-l\right)$ m. 场地的面积

$$S=l(30-l),$$

即

$$S=-l^2+30l \qquad (0<l<30).$$

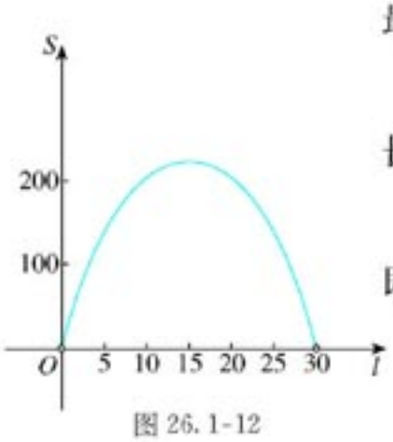


图 26.1-12

画出这个函数的图象（图 26.1-12）.

可以看出，这个函数的图象是一条抛物线的一部分. 这条抛物线的顶点是函数的图象的最高点，也就是说，当 l 取顶点的横坐标时，这个函数有最大值. 由公式可求出顶点的横坐标.

因此，当 $l=-\frac{b}{2a}=-\frac{30}{2\times(-1)}=15$ 时，S 有最大值 $\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{-30^2}{4\times(-1)}=225$. 也就是说，当 l 是 15 m 时，场地的面积 S 最大（$S=225\ \mathrm{m}^2$）.

一般地，因为抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点是最低（高）点，所以当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 有最小（大）值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

练习

1. 写出下列抛物线的开口方向、对称轴及顶点坐标. 当 x 为何值时 y 的值最小（大）?

   (1) $y=3x^2+2x$;　　(2) $y=-x^2-2x$;

   (3) $y=-2x^2+8x-8$;　　(4) $y=\frac{1}{2}x^2-4x+3$.

2. 已知直角三角形两条直角边的和等于 8，两条直角边各为多少时，这个直角三角形的面积最大，最大值是多少?

习题 26.1

复习巩固

1. 一个长方形的长是宽的 2 倍，写出这个长方形的面积与宽之间的函数关系式.
2. 某种商品的价格是 2 元，准备进行两次降价. 如果每次降价的百分率都是 x，经过两次降价后的价格 y（单位：元）随每次降价的百分率 x 的变化而变化，y 与 x 之间的关系可以用怎样的函数来表示?
3. 在同一直角坐标系中画出下列函数的图象：

$$y=3x^2,\ y=-3x^2,\ y=\frac{1}{3}x^2.$$

4. 分别写出抛物线 $y=4x^2$ 与 $y=-\frac{1}{4}x^2$ 的开口方向、对称轴及顶点.

5. 分别在同一直角坐标系内，描点画出下列各组二次函数的图象，并写出对称轴与顶点：

(1) $y=\frac{1}{3}x^2+3$，$y=\frac{1}{3}x^2-2$；

(2) $y=-\frac{1}{4}(x+2)^2$，$y=-\frac{1}{4}(x-1)^2$；

(3) $y=\frac{1}{2}(x+2)^2-2$，$y=\frac{1}{2}(x-1)^2+2$.

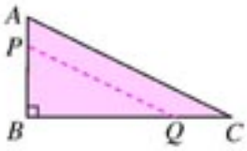
6. 先确定下列抛物线的开口方向、对称轴及顶点（用公式），再描点画图：

(1) $y=-3x^2+12x-3$；　　(2) $y=4x^2-24x+26$；

(3) $y=2x^2+8x-6$；　　(4) $y=\frac{1}{2}x^2-2x-1$.

综合运用

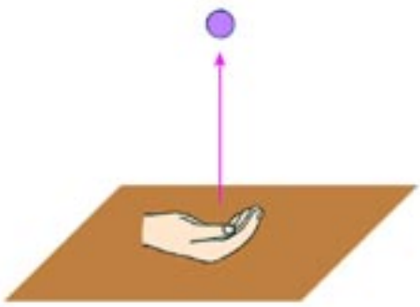
7. 如图，在△ABC 中，$\angle B=90°$，$AB=1.2$ cm，$BC=2.4$ cm，动点 P 从点 A 开始沿边 AB 向 B 以 2 mm/s 的速度移动，动点 Q 从点 B 开始沿边 BC 向 C 以 4 mm/s 的速度移动，如果 P、Q 分别从 A、B 同时出发，那么△PBQ 的面积 S 随出发时间 t 如何变化？写出函数关系式及 t 的取值范围.

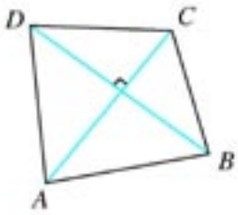


（第 7 题）

8. 一辆汽车的行驶距离 s（单位：m）与行驶时间 t（单位：s）的函数关系式是 $s=9t+\frac{1}{2}t^2$，经 12 s 汽车行驶了多远？行驶 380 m 需要多少时间？

9. 从地面竖直向上抛出一小球. 小球的高度 h（单位：m）与小球运动时间 t（单位：s）之间的关系式是 $h=30t-5t^2$. 小球运动的时间是多少时，小球最高？小球运动中的最大高度是多少？


（第 9 题）



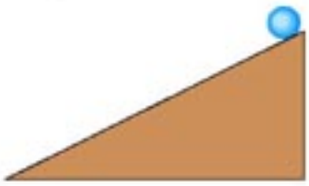
（第 10 题）

10. 如图，四边形的两条对角线 AC，BD 互相垂直，$AC+BD=10$，当 AC，BD 的长是多少时，四边形$ABCD$的面积最大？

拓广探索

11. 钢球从斜面顶端由静止开始沿斜面滚下，速度每秒增加 1.5 m/s.

(1) 写出滚动的距离 s（单位：m）与滚动的时间 t（单位：s）之间的关系式.（提示：本题中，距离＝平均速度$\bar{v}$×时间 t，$\bar{v}=\frac{v_0+v_t}{2}$，其中，$v_0$ 是开始时的速度，v_t 是 t 秒时的速度.）



（第 11 题）

(2) 如果斜面的长是 1.5 m，从斜面顶端滚到底端用多长时间？

12. 填空：

(1) 已知函数 $y=2(x+1)^2+1$，当 $x<$____时 y 随 x 的增大而减小，当 $x>$____时 y 随 x 的增大而增大，当 $x=$____时 y 最____；

(2) 已知函数 $y=-2x^2+x-4$，当 $x<$____时 y 随 x 的增大而增大，当 $x>$____时 y 随 x 的增大而减小，当 $x=$____时 y 最____.

实验与探究　选学

推测植物的生长与温度的关系

科幻小说《实验室的故事》中，有这样一个情节：科学家把一种珍奇植物分别放在不同温度的环境中，经过一定时间后，测试出这种植物的增长情况（如下表）.

温度 t/℃	−8	−6	−4	−2	0	2	4	6
植物高度增长量 l/mm	1	24	39	49	49	41	25	1

由这些数据，科学家推测出植物的增长量 l 与温度 t 的函数关系，并由它推测出最适合这种植物增长的温度.

你能想出科学家是怎样推测的吗？

利用上面的实验结果，我们可以进行如下探究：

在表内数据中，当 $t=-2$ 和 $t=0$ 时，植物增长最快；从 0 ℃起随温度逐渐增加，增长量逐渐减小；从 -2 ℃起随温度逐渐减少，增长量逐渐减小．由此可以猜想，l 作为 t 的函数，其图象的形状呈中间高两边低，且有对称性．由此猜想，图象可能是抛物线，即 l 可能是 t 的二次函数．

为检验上述猜想，建立坐标系，以 t 为横坐标，l 为纵坐标，描出表中数据对应的 8 个点，并用平滑曲线连接它们（图 1）．可以看出，这条曲线像是抛物线．于是，我们用二次函数来近似地表示 l 与 t 的关系．

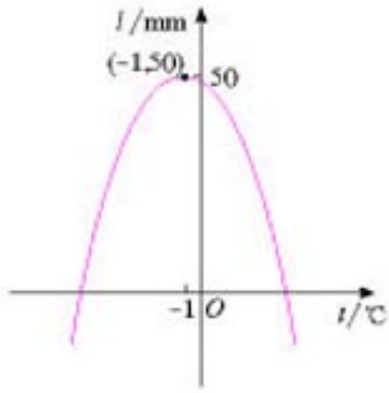


图 1

设 $l=at^2+bt+c$，如何确定常数 a，b，c？

因为　$t=0$ 时 $l=49$，

所以　$a\times0+b\times0+c=49$，得 $c=49$．

又　$t=-2$ 时 $l=49$；$t=2$ 时 $l=41$，即

$$\begin{cases}(-2)^2a+(-2)b+49=49,\\ 2^2a+2b+49=41.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}a=-1,\\ b=-2.\end{cases}$$

这样我们得到二次函数

$$l=-t^2-2t+49. \qquad ①$$

把表中 t 的其他值代入上式，可以发现对应的 l 值基本与表中值一致，个别不一致的也相差不多（这可能是因为试验中存在观察误差，或者是这个函数只近似反映 l 与 t 的关系）．因此，l 与 t 的关系可以用函数①来描述．

由函数 $l=-t^2-2t+49$ 可知，当 $l=-\dfrac{-2}{2\times(-1)}=-1$ 时，l 有最大值 50，这说明 -1 ℃是最适合这种植物生长的温度．

上面我们根据实际问题中的有关数据，数形结合地求出表示变量间关系的函数，这属于建立模拟函数描述实际问题．有时这样的函数可能只是近似地反映实际规律，但是它对认识事物有一定作用．

26.2 用函数观点看一元二次方程

问题　如图，以40 m/s的速度将小球沿与地面成30°角的方向击出时，球的飞行路线将是一条抛物线. 如果不考虑空气阻力，球的飞行高度 h(单位：m)与飞行时间t(单位：s)之间具有关系

$$h=20t-5t^2.$$

考虑以下问题：

(1) 球的飞行高度能否达到 15 m? 如能，需要多少飞行时间?

(2) 球的飞行高度能否达到 20 m? 如能，需要多少飞行时间?

(3) 球的飞行高度能否达到 20.5 m? 为什么?

(4) 球从飞出到落地要用多少时间?

图 26.2-1

分析：由于球的飞行高度 h 与飞行时间 t 的关系是二次函数

$$h=20t-5t^2,$$

所以可以将问题中 h 的值代入函数解析式，得到关于 t 的一元二次方程，如果方程有合乎实际的解，则说明球的飞行高度可以达到问题中 h 的值；否则，说明球的飞行高度不能达到问题中 h 的值.

你能结合图26.2-1指出为什么在两个时间球的高度为15 m吗？

解：（1）解方程

$$15=20t-5t^2,$$
$$t^2-4t+3=0,$$
$$t_1=1,\ t_2=3.$$

当球飞行1 s和3 s时，它的高度为15 m.

你能结合图26.2-1指出为什么只在一个时间球的高度为20 m吗？

（2）解方程

$$20=20t-5t^2,$$
$$t^2-4t+4=0,$$
$$t_1=t_2=2.$$

当球飞行2 s时，它的高度为20 m.

（3）解方程

$$20.5=20t-5t^2,$$
$$t^2-4t+4.1=0.$$

因为$(-4)^2-4\times4.1<0$，所以方程无解.

球的飞行高度达不到20.5 m.

你能结合图26.2-1指出为什么在两个时间球的高度为0 m吗？

（4）解方程

$$0=20t-5t^2,$$
$$t^2-4t=0,$$
$$t_1=0,\ t_2=4.$$

当球飞行0 s和4 s时，它的高度为0 m，即0 s时球从地面飞出，4 s时球落回地面.

从上面可以看出，二次函数与一元二次方程关系密切. 例如，已知二次函数$y=-x^2+4x$的值为3，求自变量x的值，可以解一元二次方程$-x^2+4x=3$（即$x^2-4x+3=0$）. 反过来，解方程$x^2-4x+3=0$又可以看作已知二次函数$y=x^2-4+3$的值为0，求自变量x的值.

一般地，我们可以利用二次函数$y=ax^2+bx+c$深入讨论一元二次方程$ax^2+bx+c=0$.

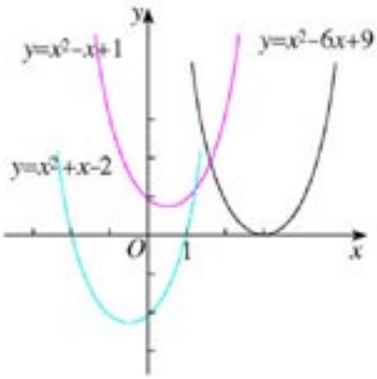


图 26.2-2

观 察

下列二次函数的图象与 x 轴有公共点吗？如果有，公共点的横坐标是多少？当 x 取公共点的横坐标时，函数的值是多少？由此，你能得出相应的一元二次方程的根吗？

(1) $y=x^2+x-2$；

(2) $y=x^2-6x+9$；

(3) $y=x^2-x+1$.

这些函数的图象如图 26.2-2 所示.

可以看出：

(1) 抛物线 $y=x^2+x-2$ 与 x 轴有两个公共点，它们的横坐标是 -2，1. 当 x 取公共点的横坐标时，函数的值是 0. 由此得出方程 $x^2+x-2=0$ 的根是 -2，1.

(2) 抛物线 $y=x^2-6x+9$ 与 x 轴有一个公共点，这点的横坐标是 3. 当 $x=3$ 时，函数的值是 0. 由此得出方程 $x^2-6x+9=0$ 有两个相等的实数根 3.

(3) 抛物线 $y=x^2-x+1$ 与 x 轴没有公共点，由此可知，方程 $x^2-x+1=0$ 没有实数根.

反过来，由一元二次方程的根的情况，也可以确定相应的二次函数与 x 轴的位置关系.

归 纳

一般地，从二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象可知，

(1) 如果抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴有公共点，公共点的横坐标是 x_0，那么当 $x=x_0$ 时，函数的值是 0，因此 $x=x_0$ 就是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根.

(2) 二次函数的图象与 x 轴的位置关系有三种：没有公共点，有一个公共点，有两个公共点. 这对应着一元二次方程根的三种情况：没有实数根，有两个相等的实数根，有两个不等的实数根.

由上面的结论，我们可以利用二次函数的图象求一元二次方程的根．由于作图或观察可能存在误差，由图象求得的根，一般是近似的．

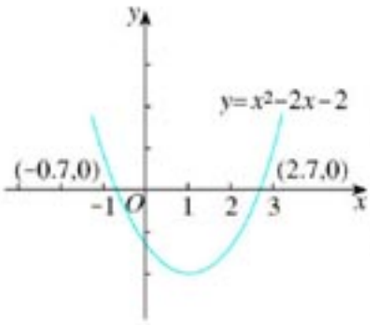


图 26.2-3

例 利用函数图象求方程 $x^2-2x-2=0$ 的实数根（精确到 0.1）．

解： 作 $y=x^2-2x-2$ 的图象（图 26.2-3），它与 x 轴的公共点的横坐标大约是 -0.7，2.7．

所以方程 $x^2-2x-2=0$ 的实数根为

$$x_1\approx-0.7,\ x_2\approx2.7.$$

习题 26.2

复习巩固

1. 已知函数 $y=3x^2-4x+1$．
   (1) 画出函数的图象；
   (2) 观察图象，当 x 取哪些值时，函数值为 0？
2. 用函数的图象求下列方程的解：
   (1) $x^2-3x+2=0$；　　(2) $-x^2+6x-9=0$；
   (3) $x^2+x+2=0$；　　(4) $4-x-x^2=0$．

综合运用

3. 如图，一名男生推铅球，铅球行进高度 y 与水平距离 x 之间的关系是
$$y=-\frac{1}{12}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}.$$
   (1) 画出函数的图象；
   (2) 观察图象，指出铅球推出的距离．

（第 3 题）

4. 抛物线与 x 轴的公共点是 $(-1,0)$，$(3,0)$，求这条抛物线的对称轴．

拓广探索 ▶▶

5. 画出函数 $y=x^2-2x-3$ 的图象，利用图象回答：

（1）方程 $x^2-2x-3=0$ 的解是什么；

（2）x 取什么值时，函数值大于 0；

（3）x 取什么值时，函数值小于 0.

6. 下列情形时，如果 $a>0$，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点在什么位置？

（1）方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不等的实数根；

（2）方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相等的实数根；

（3）方程 $ax^2+bx+c=0$ 无实数根.

如果 $a<0$ 呢？

信息技术应用　　选学

探索二次函数的性质

用某些计算机画图软件（如《几何画板》），可以方便地画出二次函数的图象，进而从图象探索二次函数的性质. 如图 1，用计算机软件画出函数 $y=x^2-2x-3$ 的图象，拖动图象上的一点 P，让这点沿抛物线移动，观察动点坐标的变化，可以发现：

图 1

图象最低点的坐标是(1，−4)，也就是说，当 $x=1$ 时，y 有最小值−4；

当 $x<1$ 时，y 随 x 的增大而减小，当 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而增大.

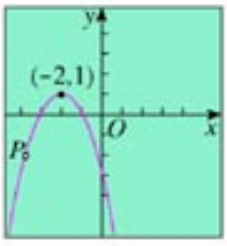


图 2

又如图 2，用计算机软件画出函数 $y=-x^2-4x-3$ 的图象，拖动图象上的一点 P，可以发现：

图象最高点的坐标是(−2，1)，也就是说，当 $x=-2$ 时，y 有最大值 1；

当 $x<-2$ 时，y 随 x 的增大而增大，当 $x>-2$ 时，y 随 x 的增大而减小.

利用计算机软件的画图功能，很容易利用二次函数的图象解一元二次方程. 要解方程 $ax^2+bx+c=0$，只要用计算机软件画出相应抛物线 $y=ax^2+bx+c$，再让计算机软件显示抛物线与 x 轴的公共点的坐标，就能得出要求的方程的根. 利用图 1，图 2 中的图象试一试，分别求出方程 $x^2-2x-3=0$，$-x^2-4x-3=0$ 的根.

26.3 实际问题与二次函数

前面我们结合实际问题，讨论了二次函数，看到了二次函数在解决实际问题中的一些应用，下面我们进一步用二次函数讨论一些实际问题.

探究1

某商品现在的售价为每件60元，每星期可卖出300件. 市场调查反映：如调整价格，每涨价1元，每星期要少卖出10件；每降价1元，每星期可多卖出18件. 已知商品的进价为每件40元，如何定价才能使利润最大？

分析： 调整价格包括涨价和降价两种情况. 我们先来看涨价的情况.

怎样确定 x 的取值范围？

(1) 设每件涨价 x 元，则每星期售出商品的利润 y 随之变化. 我们先来确定 y 随 x 变化的函数式. 涨价 x 元时，每星期少卖 $10x$ 件，实际卖出 $(300-10x)$ 件，销售额为 $(60+x)(300-10x)$ 元，买进商品需付 $40(300-10x)$ 元. 因此，所得利润

$$y=(60+x)(300-10x)-40(300-10x),$$

即

$$y=-10x^2+100x+6\ 000,$$

其中，$0\leqslant x\leqslant 30$.

根据上面的函数，填空：

当 $x=$____时，y 最大，也就是说，在涨价的情况下，涨价____元，即定价_____元时，利润最大，最

大利润是_____.

(2) 在降价的情况下，最大利润是多少？请你参考 (1) 的讨论自己得出答案.

由 (1) (2) 的讨论及现在的销售状况，你知道应如何定价能使利润最大了吗？

探究2

计算机把数据存储在磁盘上，磁盘是带有磁性物质的圆盘，磁盘上有一些同心圆轨道，叫做磁道. 如图 26.3-1，现有一张半径为45 mm的磁盘.

图 26.3-1

(1) 磁盘最内磁道的半径为r mm，其上每0.015 mm的弧长为 1 个存储单元，这条磁道有多少个存储单元？

(2) 磁盘上各磁道之间的宽度必须不小于0.3 mm，磁盘的外圆周不是磁道，这张磁盘最多有多少条磁道？

(3) 如果各磁道的存储单元数目与最内磁道相同，最内磁道的半径 r 是多少时，磁盘的存储量最大？

可以查阅有关资料，了解磁盘存储数据的原理.

分析：(1) 最内磁道的周长为 $2\pi r$ mm，它上面的存储单元的个数不超过$\frac{2\pi r}{0.015}$.

（2）由于磁盘上各磁道之间的宽度必须不小于 0.3 mm，磁盘的外圆周不是磁道，各磁道分布在磁盘上内径为 r 外径为 45 的圆环区域，所以这张磁盘最多有 $\frac{45-r}{0.3}$ 条磁道.

（3）当各磁道的存储单元数目与最内磁道相同时，磁盘每面存储量＝每条磁道的存储单元数×磁道数.

设磁盘每面存储量为 y，则

$$y=\frac{2\pi r}{0.015}\times\frac{45-r}{0.3},$$

即

$$y=\frac{2\pi}{0.004\,5}(45r-r^2)\quad(0<r<45).$$

根据上面这个函数式，你能得出当 r 为何值时磁盘的存储量最大吗？

探究3

图 26.3-2 中是抛物线形拱桥，当水面在 l 时，拱顶离水面 2 m，水面宽 4 m. 水面下降 1 m，水面宽度增加多少？

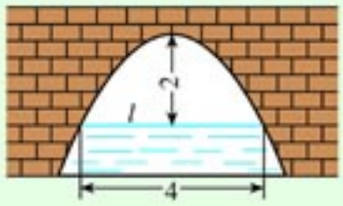


图 26.3-2

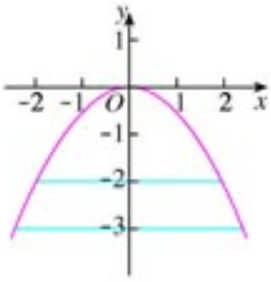


图 26.3-3

为什么这样设二次函数？

分析：我们知道，二次函数的图象是抛物线，建立适当的坐标系，就可以求出这条抛物线表示的二次函数. 为解题简便，以抛物线的顶点为原点，以抛物线的对称轴为 y 轴建立直角坐标系（图 26.3-3）.

可设这条抛物线表示的二次函数为 $y=ax^2$.

由抛物线经过点(2，−2)，可得

$$-2=a\times2^2,\ a=-\frac{1}{2}.$$

这条抛物线表示的二次函数为 $y=-\frac{1}{2}x^2$.

当水面下降 1 m 时，水面的纵坐标为 $y=-3$. 请你根据上面的函数表达式求出这时的水面宽度.

水面下降 1 m，水面宽度增加_____ m.

习题 26.3

复习巩固

1. 下列抛物线有最高点或最低点吗？如果有，写出这些点的坐标（用公式）：

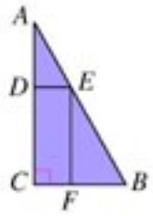
   (1) $y=-4x^2+3x$；　　(2) $y=3x^2+x+6$.

2. 某种商品每件的进价为 30 元，在某段时间内若以每件 x 元出售，可卖出 $(200-x)$ 件，应如何定价才能使利润最大？

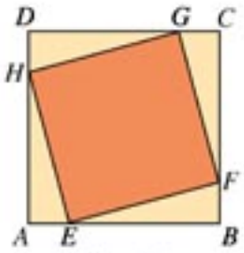
3. 飞机着陆后滑行的距离 s（单位：m）与滑行的时间 t（单位：s）的函数关系式是 $s=60t-1.5t^2$. 飞机着陆后滑行多远才能停下来？

综合运用

4. 一块三角形废料如图所示，$\angle A=30^\circ$，$\angle C=90^\circ$，$AB=12$. 用这块废料剪出一个长方形 $CDEF$，其中，点 D，E，F 分别在 AC，AB，BC 上. 要使剪出的长方形 $CDEF$ 面积最大，点 E 应选在何处？



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，点 E、F、G、H 分别位于正方形 $ABCD$ 的四条边上. 四边形 $EFGH$ 也是正方形. 当点 E 位于何处时，正方形 $EFGH$ 的面积最小？

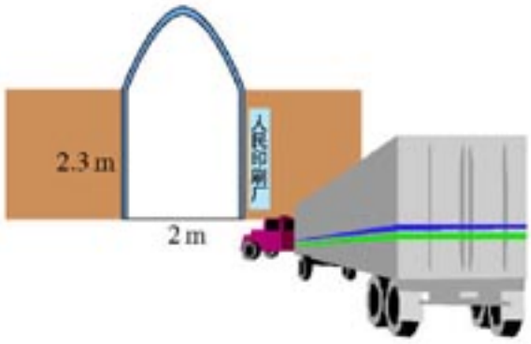
6. 某宾馆有 50 个房间供游客居住，当每个房间的定价为每天 180 元时，房间会全部住满. 当每个房间每天的定价每增加 10 元时，

就会有一个房间空闲. 如果游客居住房间，宾馆需对每个房间每天支出 20 元的各种费用. 房价定为多少时，宾馆利润最大?

拓广探索

7. 如图，厂门的上方是一段抛物线，抛物线的顶点离地面的高度是 3.8 m. 一辆装满货物的卡车，宽为 1.6 m，高为 2.6 m. 要求卡车的上端与门的距离不小于 0.2 m，这辆卡车能否通过厂门?

8. 分别用定长为 L 的线段围成矩形和圆，哪种图形的面积大? 为什么?



（第 7 题）

数学活动

活动 1 如图 1，在一张纸上作出函数 $y=x^2-2x+3$ 的图象，沿 x 轴把这张纸对折，描出与抛物线 $y=x^2-2x+3$ 关于 x 轴对称的抛物线，这条抛物线是哪个二次函数的图象？

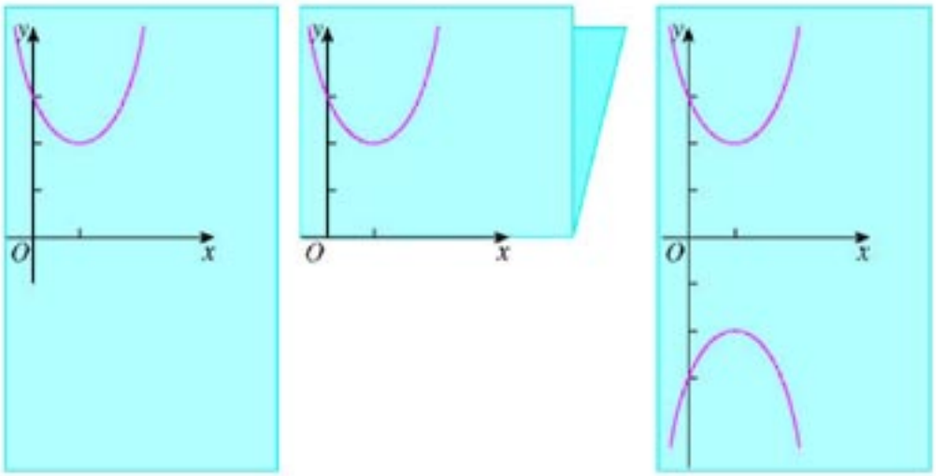


图 1

活动 2 如图 2，从一张矩形纸较短的边上找一点 E，过这点剪下两个正方形，它们的边长分别是 AE，DE. 要使剪下的两个正方形的面积和最小，点 E 应选在何处？为什么？

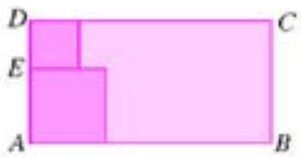
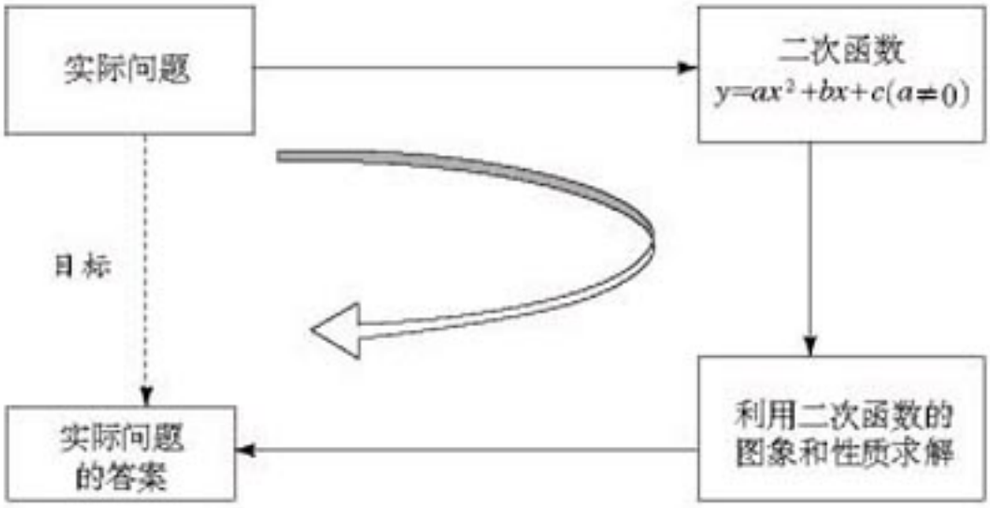


图 2

小　结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

1. 举例说明，一些实际问题中变量之间的关系可以用二次函数表示，列出函数表达式并画出图象.

2. 结合二次函数的图象回顾二次函数的性质，例如根据抛物线的开口方向、顶点坐标，说明二次函数在什么情况下取得最大（小）值.

3. 结合抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 与 x 轴的位置关系，说明方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的各种情况.

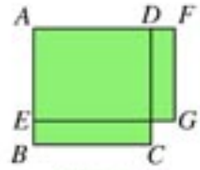
4. 在日常生活、生产和科研中，常常会遇到求什么条件下可以使材料最省、时间最少、效率最高等问题，其中一些问题可以归结为求二次函数的最大值或最小值. 请举例说明如何分析、解决这样的问题.

5. 回顾一次函数、反比例函数和二次函数，体会函数这种数学模型在反映现实世界的运动变化中的作用.

复习题 26

复习巩固

1. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长是 4．E 是 AB 上一点，F 是 AD 的延长线上一点，$BE=DF$．四边形 $AEGF$ 是矩形，则矩形 $AEGF$ 的面积 y 随 BE 的长 x 的变化而变化，y 与 x 之间的关系可以用怎样的函数来表示？



（第 1 题）

2. 某商场第 1 年销售计算机 5 000 台，如果每年的销售量比上一年增加相同的百分率 x，写出第 3 年的销售量 y 与每年增加的百分率 x 之间的函数关系式．

3. 选择题．

在抛物线 $y=x^2-4x-4$ 上的一个点是（　　）

(A)（4，4）．　　(B)（3，−1）．

(C)（−2，−8）．　　(D) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{7}{4}\right)$．

4. 先确定下列抛物线的开口方向、对称轴及顶点坐标（用公式），再描点画图：

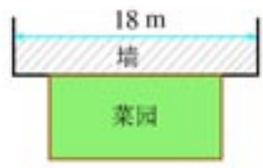
(1) $y=x^2-2x-3$；　　(2) $y=1+6x-x^2$；

(3) $y=\frac{1}{2}x^2-2x+1$；　　(4) $y=-\frac{1}{4}x^2+x-4$．

5. 汽车刹车后行驶的距离 s（单位：m）与行驶的时间 t（单位：s）的函数关系式是 $s=15t-6t^2$．汽车刹车后到停下来前进了多远？

综合运用

6. 用一段长为 30 m 的篱笆围成一个一边靠墙的矩形菜园，墙长为 18 m，这个矩形的长、宽各为多少时，菜园的面积最大，最大面积是多少？



（第 6 题）

7. 一个滑雪者从 85 m 长的山坡滑下，滑行的距离 s（单位：m）与滑行时间 t（单位：s）的函数关系式是 $s=1.8t+0.064t^2$．他通过这段山坡需要多长时间？

8. 已知矩形的周长为 36 cm，矩形绕它的一条边旋转形成一个圆柱，矩形的长、宽各为多少时，旋转形成的圆柱的侧面积最大？

拓广探索

9. 在周长为定值 p 的扇形中，半径是多少时扇形的面积最大？

10. 对某条路线的长度进行 n 次测量，得到 n 个结果 x_1，x_2，…，x_n. 如果用 x 作为这条路线长度的近似值，当 x 取什么值时，$(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+\cdots+(x-x_n)^2$ 最小？