

义务教育课程标准实验教科书

# 数 学

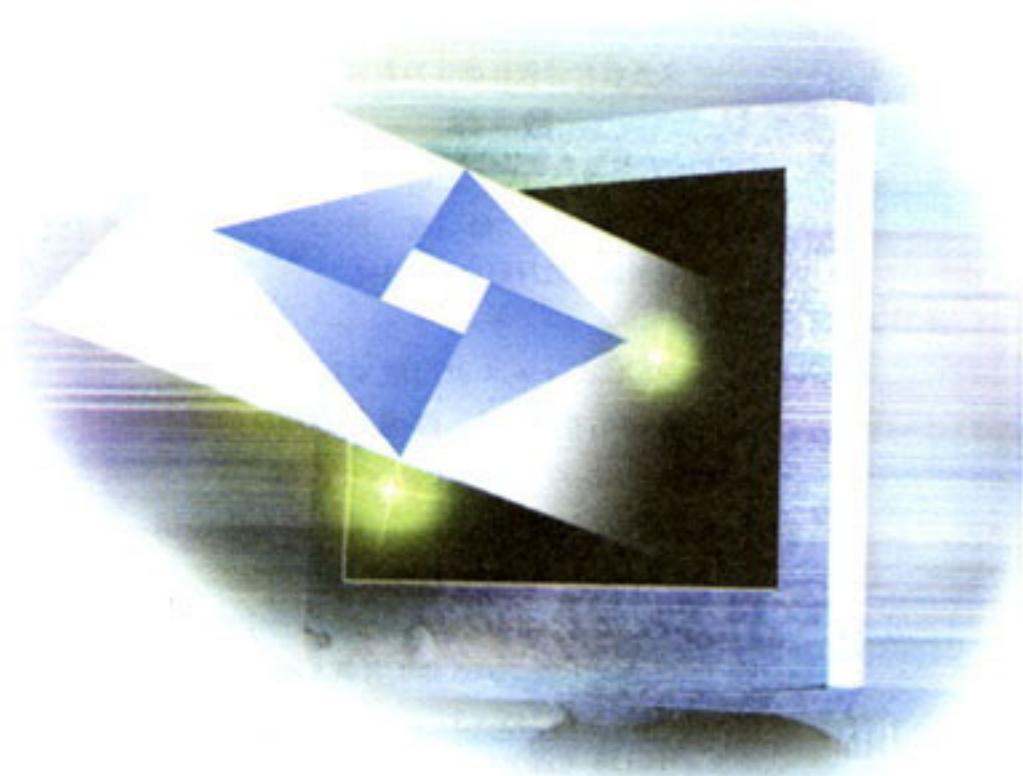
---

SHUXUE

---

八年级 上册

课 程 教 材 研 究 所 编著  
中学数学课程教材研究开发中心



人民教育出版社

# 本册导引

亲爱的同学，祝贺你升入八年级。

你将要学习的这册书是我们根据《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》编写的实验教科书，这是你在七~九年级要学习的六册数学教科书中的第三册。

与前两册一样，你将继续乘坐“观察”“思考”“探究”“讨论”“归纳”之舟，从身边实际问题出发，在数学的海洋里乘风破浪，去探索、发现数学的奥秘；你还要用学到的本领去解决“复习巩固”“综合运用”“拓广探索”等三个层次的问题；你可以有选择地进行“数学活动”；如果有兴趣，你也可以到“阅读与思考”“观察与猜想”“实验与探究”“信息技术应用”这些选学内容中去看看更广阔的数学世界。通过探索、尝试，相信你的聪明才智会得到充分的发挥，你用数学解决问题的能力会迈上一个新的台阶。

现在，让我们启航，一起去遨游八年级上册这片数学新海域吧！

我们生活在变化的世界中，时间推移、人口增长、水位升降……变化的例子举不胜举。函数将给你提供描述这些变化的一种数学工具。通过分析实际问题中的变量关系，你就得到了相应的函数，并能利用它解决非常广泛的问题。学了“**一次函数**”一章，你会对这些有所体会。



我们学过收集和整理数据，对收集来的数据如何加以描述，是我们需要继续学习的内容。“**数据的描述**”将引导你接触到几种常见的统计图表，学会如何用图表更直观、更清楚地描述数据，从而更好地发挥统计的作用。

“**全等三角形**”将带你认识形状、大小相同的图形，探索两个三角形形状、大小相同的条件，了解角的平分线的性质。学了这些内容，你会对图形有进一步的认识，并初步体验怎样证明简单的数学结论。

在我们周围的世界，你会看到许多对称的现象。怎样认识轴对称与轴对称图形呢？学了“**轴对称**”一章，你就会获得答案。

我们知道，可以用字母表示数，用含有字母的式子表示实际问题中的数量关系。“**整式**”是我们并不陌生的一类式子，对它的进一步讨论，将使我们能够解决更多与数量关系有关的问题，加深对“从数到式”这个由具体到抽象的过程的认识。

数学伴着我们成长、数学伴着我们进步、数学伴着我们成功，让我们一起随着这册书，畅游神奇、美妙的数学世界吧！



义务教育课程标准实验教科书

数 学

八年级 上册

课 程 教 材 研 究 所 编著  
中学数学课程教材研究开发中心

\*

人 人 事 业 出 版 社 出 版 发 行

(北京沙滩后街 55 号 邮编: 100009)

网 址: <http://www.pep.com.cn>

人 人 事 业 出 版 社 印 刷 厂 印 装 全 国 新 华 书 店 经 销

\*

开本: 787 毫米 × 1 092 毫米 1/16 印张: 13.75 字数: 210 000

2004 年 12 月第 1 版 2005 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 7-107-18245-5 定价: 13.65 元  
G · 11334 (课)

著作权所有·请勿擅用本书制作各类出版物·违者必究

如发现印、装质量问题, 影响阅读, 请与出版社联系调换。

(联系地址: 北京市方庄小区芳城园三区 13 号楼 邮编: 100078)

# 目 录

## 第十一章 一次函数 ..... 2

11.1 变量与函数 .....	4
 信息技术应用	
用计算机画函数图象 .....	20
11.2 一次函数 .....	22
 阅读与思考	
科学家如何测算地球的年龄 .....	36
11.3 用函数观点看方程(组)与不等式 .....	38
数学活动 .....	47
小结 .....	48
复习题 11 .....	49

## 第十二章 数据的描述 ..... 52

12.1 几种常见的统计图表 .....	54
12.2 用图表描述数据 .....	67
 信息技术应用	
利用计算机画统计图 .....	69
 阅读与思考	
作者可能是谁 .....	77
12.3 课题学习 从数据谈节水 .....	79
数学活动 .....	82
小结 .....	84
复习题 12 .....	85

## 第十三章 全等三角形 ..... 88



13.1 全等三角形 .....	90
13.2 三角形全等的条件 .....	94
阅读与思考	
为什么要证明 .....	106
13.3 角的平分线的性质 .....	107
数学活动 .....	112
小结 .....	113
复习题 13 .....	114

## 第十四章 轴对称 ..... 116



14.1 轴对称 .....	118
14.2 轴对称变换 .....	128
信息技术应用	
探索轴对称的性质 .....	138
14.3 等腰三角形 .....	140
实验与探究	
三角形中边与角之间的不等关系 .....	151
数学活动 .....	153
小结 .....	155
复习题 14 .....	156

## 第十五章 整式 ..... 160

15. 1 整式的加减 .....	162
15. 2 整式的乘法 .....	169
15. 3 乘法公式 .....	179



### 阅读与思考

杨辉三角 .....	186
15. 4 整式的除法 .....	187
15. 5 因式分解 .....	194



### 观察与猜想

$x^2 + (p+q)x + pq$ 型式子的因式分解 .....	202
数学活动 .....	203
小结 .....	205
复习题 15 .....	206

## 部分中英文词汇索引 ..... 208

主 编：林 群

副 主 编：田载今 薛 彬

本册主编：薛 彬

主要编者：王忠钦 田载今 左怀玲 田琪琨

薛 彬 吴江媛 李海东 郑 廉

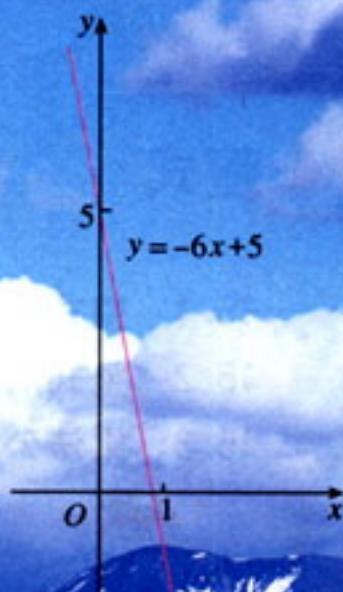
责任编辑：李海东

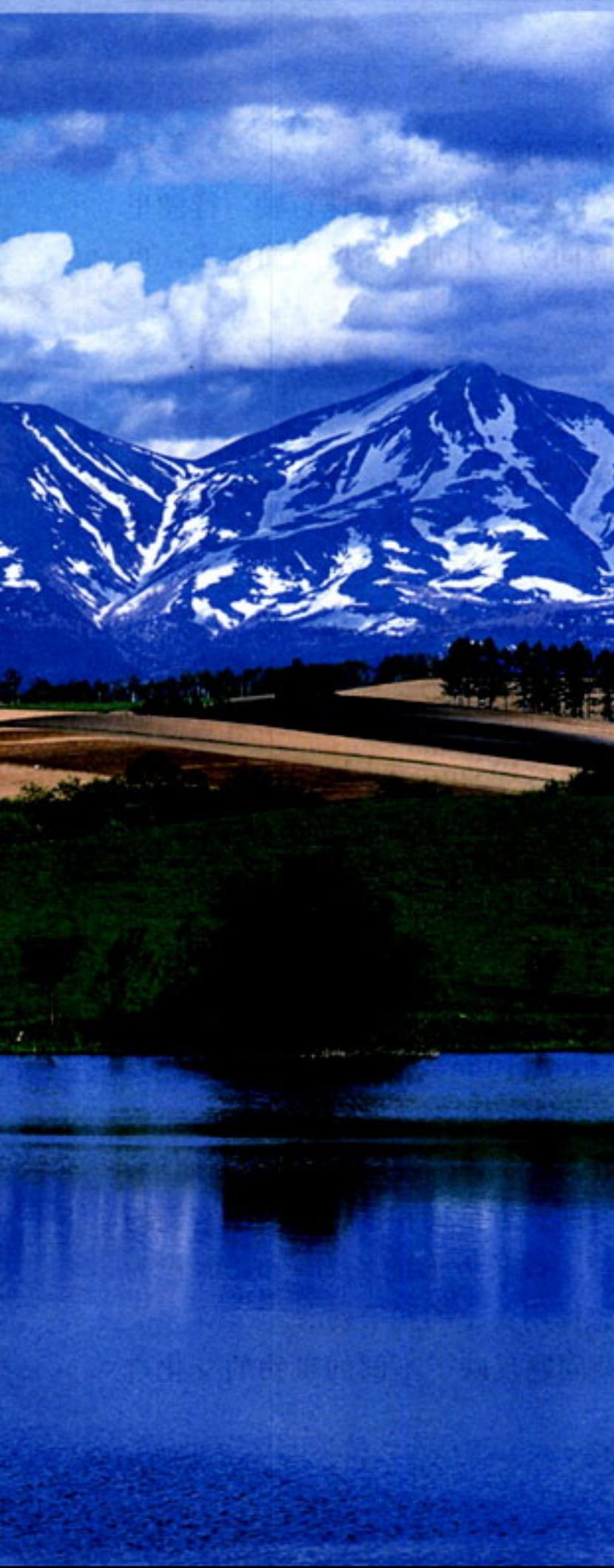
美术编辑：王俊宏 刘 昽

封面设计：林荣桓

# 第十一章 一次函数

$x/\text{km}$	1	1.5	2	2.5	3
$y/\text{℃}$	-1	-4	-7	-10	-13





# 11

- 11.1 变量与函数
- 11.2 一次函数
- 11.3 用函数观点看方程(组)与不等式

“万物皆变”——行星在宇宙中的位置随时间而变化；人体细胞的个数随年龄而变化；气温随海拔而变化；汽车行驶里程随行驶时间而变化……这种一个量随另一个量的变化而变化的现象大量存在。

为了更深刻地认识千变万化的世界，人们经归纳总结得出一个重要的数学工具——函数，用它描述变化中的数量关系。函数的应用极其广泛。

什么是函数？本章将通过具体问题引导你认识它，并且讨论一类最基本的函数——一次函数及其简单应用，最后用函数的观点再次认识方程（组）与不等式。

# 11.1 变量与函数

## 11.1.1 变量

先请思考下面几个问题：

- (1) 汽车以 60 千米/时的速度匀速行驶，行驶里程为  $s$  千米，行驶时间为  $t$  小时，先填下面的表，再试用含  $t$  的式子表示  $s$ .

$t$ / 时	1	2	3	4	5
$s$ / 千米					



- (2) 每张电影票的售价为 10 元，如果早场售出票 150 张，日场售出票 205 张，晚场售出票 310 张，三场电影的票房收入各多少元？设一场电影售出票  $x$  张，票房收入为  $y$  元，怎样用含  $x$  的式子表示  $y$ ？

- (3) 在一根弹簧的下端悬挂重物，改变并记录重物的质量，观察并记录弹簧长度的变化，探索它们的变化规律。如果弹簧原长 10 cm，每 1 kg 重物使弹簧伸长 0.5 cm，怎样用含重物质量  $m$ （单位：kg）的式子表示受力后的弹簧长度  $l$ （单位：cm）？

- (4) 要画一个面积为  $10 \text{ cm}^2$  的圆，圆的半径应取多少？圆面积为  $20 \text{ cm}^2$  呢？怎样用含圆面积  $S$  的式子表示圆半径  $r$ ？

- (5) 如图 11.1-1，用 10 m 长的绳子围成长方形。试改变长方形的长度，观察长方形的面积怎样变化。记录不同的长方形的长度值，计算相应的长方形面积的值，探索它们的变化规律。设长方形的长为  $x$  m，面积为  $S \text{ m}^2$ ，怎样用含  $x$  的式子表示  $S$ ？

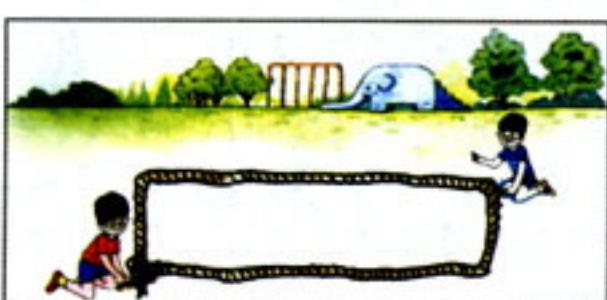


图 11.1-1

这些问题反映了不同的事物的变化过

程，其中有些量（例如时间  $t$ ，里程  $s$ ；售出票数  $x$ ，票房收入  $y$ ……）的值是按照某种规律变化的。在一个变化过程中，我们称数值发生变化的量为**变量** (variable)。有些量的数值是始终不变的，例如上面问题中的速度 60（单位：千米/时），票价 10（单位：元）……绳长 10（单位：m）以及长方形的长宽之和 5（单位：m），我们称它们为**常量** (constant)。



具体指出上面的各问题中，哪些量是变量，哪些量是常量。



### 练习

举出一些变化的实例，指出其中的常量与变量。

## 11.1.2 函数

11.1.1 的每个问题中是否各有两个变量？同一个问题中的变量之间有什么联系？

在问题（1）中，观察填出的表格，你会发现：每当行驶时间  $t$  取定一个值时，行驶里程  $s$  就随之确定一个值，例如  $t=1$ ，则  $s=60$ ； $t=2$ ，则  $s=120$ …… $t=5$ ，则  $s=300$ 。

问题（2）中，经计算可以发现：每当售票数量  $x$  取定一个值时，票房收入  $y$  就随之确定一个值，例

如早场  $x = 150$ , 则  $y = 1500$ ; 日场  $x = 205$ , 则  $y = 2050$ ; 晚场  $x = 310$ , 则  $y = 3100$ .

问题(3)中, 通过试验可以看出: 每当重物质量  $m$  取定一个值时, 弹簧长度  $l$  就随之确定一个值. 如果弹簧原长  $10\text{ cm}$ , 每  $1\text{ kg}$  重物使弹簧伸长  $0.5\text{ cm}$ , 那么当  $m=1$  时,  $l=10.5$ . 当  $m=10$  时,  $l$  等于多少?

问题(4)中, 你容易算出: 当  $S=10\text{ cm}^2$  时,  $r=\underline{\hspace{2cm}}$  cm; 当  $S=20\text{ cm}^2$  时,  $r=\underline{\hspace{2cm}}$  cm. 每当  $S$  取定一个值时,  $r$  随之确定一个值. 你能得出: 两者的关系为  $r=\underline{\hspace{2cm}}$ .

问题(5)中, 我们可以根据下表中给出的数值确定长方形一边的长, 得出另一边的长, 计算长方形的面积, 填表并探索变量间的关系.

长 $x / \text{m}$	4	3	2.5	2
宽 $(5-x) / \text{m}$				
面积 $S / \text{m}^2$				

每当长方形长  $x$  取定一个值时, 面积  $S$  就随之确定一个值,  $S=\underline{\hspace{2cm}}$ .

### 归 纳

上面每个问题中的两个变量互相联系, 当其中一个变量取定一个值时, 另一个变量就 \_\_\_\_\_.

在一些用图或表格表达的问题中, 也能看到两个变量间上面那样的关系.



## 观察

(1) 图 11.1-2 是体检时的心电图, 其中横坐标  $x$  表示时间, 纵坐标  $y$  表示心脏部位的生物电流, 它们是两个变量. 在心电图中, 对于  $x$  的每一个确定的值,  $y$  都有唯一确定的对应值吗?

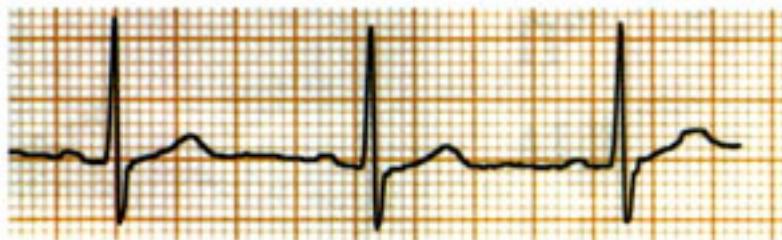


图 11.1-2

(2) 在下面的我国人口数统计表中, 年份与人口数可以记作两个变量  $x$  与  $y$ , 对于表中每一个确定的年份 ( $x$ ), 都对应着一个确定的人口数 ( $y$ ) 吗?

中国人口数统计表

年 份	人口数/亿
1984	10.34
1989	11.06
1994	11.76
1999	12.52

一般地, 在一个变化过程中, 如果有两个变量  $x$  与  $y$ , 并且对于  $x$  的每一个确定的值,  $y$  都有唯一确定的值与其对应, 那么我们就说  $x$  是**自变量** (independent variable),  $y$  是  $x$  的**函数** (function). 如果当  $x=a$  时  $y=b$ , 那么  $b$  叫做当自变量的值为  $a$  时的**函数值**.

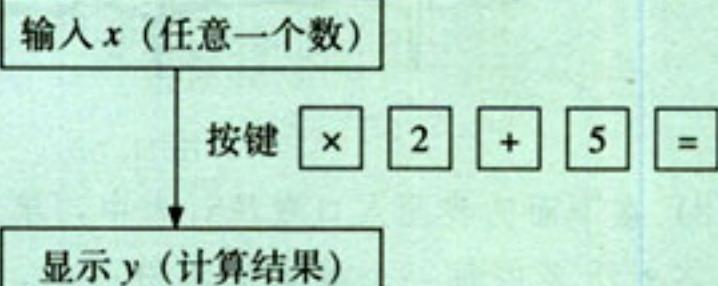
可以认为: 前面问题 (1) 中, 时间  $t$  是自变量, 里程  $s$  是  $t$  的函数,  $t=1$  时的函数值  $s=60$ ,  $t=2$  时的函数值  $s=120$ ,  $t=2.5$  时的函数值  $s=\underline{\hspace{2cm}}$  ……同样地, 在心电图中, 时间  $x$  是自变量, 心脏电流  $y$  是  $x$

的函数；人口数统计表中，年份  $x$  是自变量，人口数  $y$  是  $x$  的函数，当  $x=1999$  时，函数值  $y= \underline{\hspace{2cm}}$ .

从上面可知，许多问题中的变量之间都存在函数关系.

### 探究

(1) 在计算器上按照下面的程序进行操作：

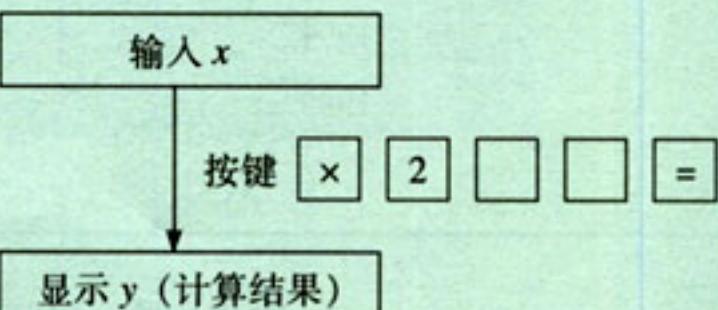


填表

$x$	1	3	-4	0	101
$y$					

显示的数  $y$  是输入的数  $x$  的函数吗？为什么？

(2) 在计算器上按照下面的程序进行操作：



下表中的  $x$  与  $y$  是输入的 5 个数与相应的计算结果.

$x$	1	2	3	0	-1
$y$	3	5	7	1	-1

所按的第三、四两个键是哪两个键？ $y$  是  $x$  的函数吗？如果是，写出它的表达式（用含  $x$  的式子表示  $y$ ）.



0.1x 表示什么意义?

**例 1** 一辆汽车的油箱中现有汽油 50 L, 如果不再加油, 那么油箱中的油量  $y$ (单位: L) 随行驶里程  $x$ (单位: km) 的增加而减少, 平均耗油量为 0.1 L/km.

(1) 写出表示  $y$  与  $x$  的函数关系的式子.

(2) 指出自变量  $x$  的取值范围.

(3) 汽车行驶 200 km 时, 油箱中还有多少汽油?

**解:** (1) 行驶里程  $x$ (单位: km) 是自变量, 油箱中的油量  $y$ (单位: L) 是  $x$  的函数, 它们的关系为

$$y=50-0.1x.$$

(2) 仅从式子  $y=50-0.1x$  看,  $x$  可以取任意实数, 但是考虑到  $x$  代表的实际意义为行驶里程, 所以  $x$  不能取负数, 并且行驶中的耗油量为  $0.1x$ , 它不能超过油箱中现有汽油量 50 L, 即

$$0.1x \leqslant 50.$$

因此, 自变量  $x$  的取值范围是

$$0 \leqslant x \leqslant 500.$$

(3) 汽车行驶 200 km 时, 油箱中的汽油量是函数  $y=50-0.1x$  在  $x=200$  时的函数值. 将  $x=200$  代入  $y=50-0.1x$ , 得

$$y=50-0.1 \times 200=30.$$

汽车行驶 200 km 时, 油箱中还有 30 L 汽油.

### 练习

下列问题中哪些量是自变量? 哪些量是自变量的函数? 试写出用自变量表示函数的式子.

1. 改变正方形的边长  $x$ , 正方形的面积  $S$  随之改变.

2. 秀水村的耕地面积是  $10^6$  m<sup>2</sup>, 这个村人均占有耕地面积  $y$  随这个村人数  $n$  的变化而变化.

### 11.1.3 函数的图象

有些问题中的函数关系很难列式子表示，但是可以用图来直观地反映，例如用心电图表示心脏生物电流与时间的关系。即使对于能列式表示的函数关系，如也能画图表示则会使函数关系更清晰。

你能解释  
 $x > 0$  这个范围是  
怎样确定的吗？

正方形的边长  $x$  与面积  $S$  的函数关系为  $S = x^2$ ，其中自变量  $x$  的取值范围是  $x > 0$ 。我们还可以利用在坐标系中画图的方法来表示  $S$  与  $x$  的关系。

自变量  $x$  的一个确定的值与它所对应的唯一的函数值  $S$ ，是否确定了一个点  $(x, S)$  呢？

计算并填写下表：

$x$	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$S$									

表示  $x$  与  $S$  的对应关系的点有无数个。但是实际上我们只能描出其中有限个点，同时想象出其他点的位置。

如图 11.1-3，在直角坐标系中，将上面表格中各对数值所对应的点画出，然后连接这些点，所得曲线上每一个点都代表  $x$  的值与  $S$  的值的一种对应，例如点  $(2, 4)$  表示  $x=2$  时， $S=4$ 。

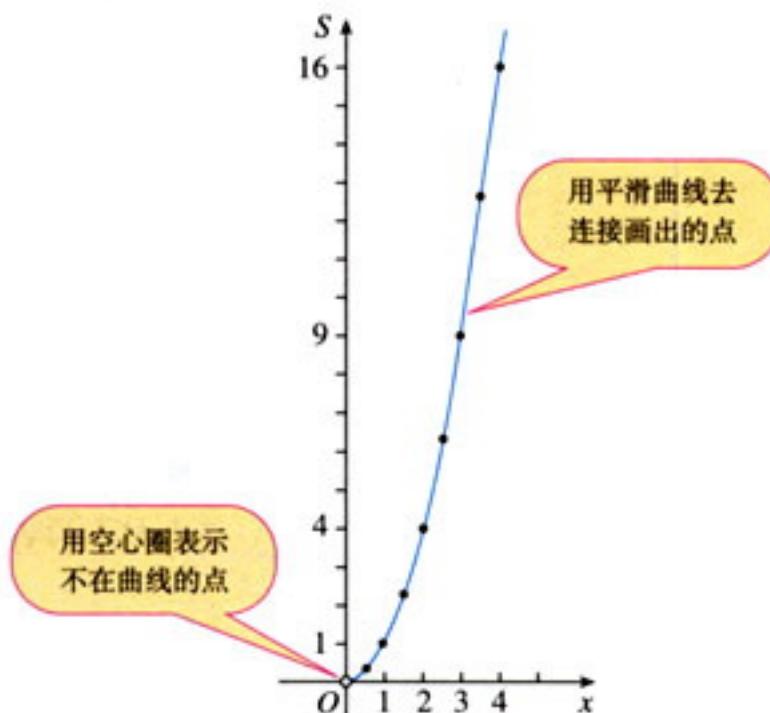


图 11.1-3

通过图象可以数形结合地研究函数.

一般地,对于一个函数,如果把自变量与函数的每对对应值分别作为点的横、纵坐标,那么坐标平面内由这些点组成的图形,就是这个函数的图象(graph).图11.1-3的曲线即函数

$$S=x^2 \quad (x>0)$$

的图象.



### 观察

图11.1-4是自动测温仪记录的图象,它反映了北京的春季某天气温 $T$ 如何随时间 $t$ 的变化而变化.你从图象中得到了哪些信息?

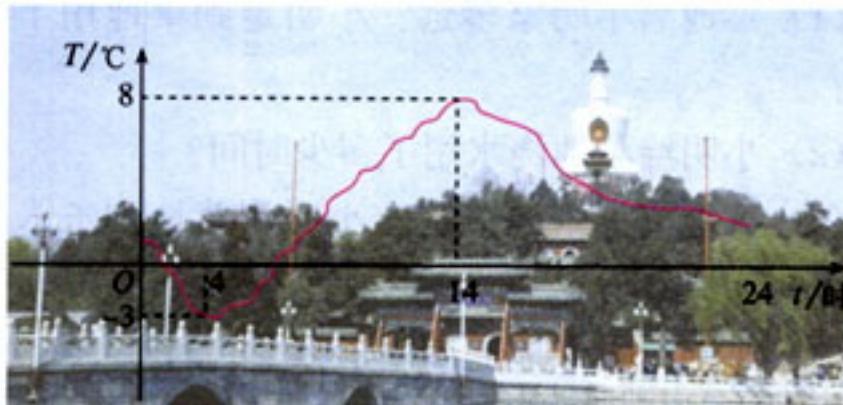


图11.1-4

如有条件,  
你可以用带有温  
度探头的计算机  
(器),测试、记录  
温度和绘制表示  
温度变化的图象.

可以认为,气温 $T$ 是时间 $t$ 的函数,图11.1-4是这个函数的图象.由图象可知:

- (1) 这一天中凌晨4时气温最低( $-3^{\circ}\text{C}$ ),14时气温最高( $8^{\circ}\text{C}$ );
- (2) 从0时至4时气温呈下降状态(即温度随着时间的增长而下降),从4时到14时气温呈上升状态,从14时至24时气温又呈下降状态;
- (3) 我们可以从图象中看出这一天中任一时刻的气温大约是多少;
- (4) 如果长期观察这样的气温图象,我们就能得到更多信息,掌握更多气温的变化规律.

**例 2** 下面的图象(图 11.1-5)反映的过程是：小明从家去菜地浇水，又去玉米地锄草，然后回家。其中  $x$  表示时间， $y$  表示小明离他家的距离。

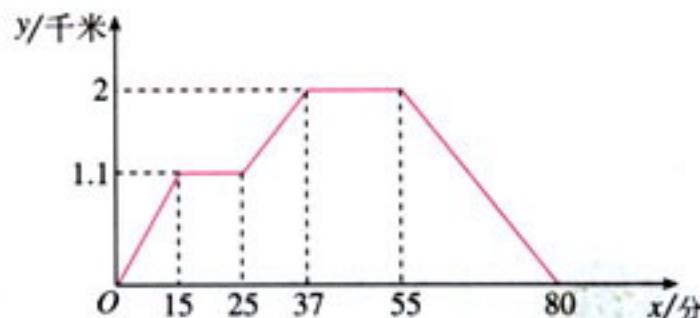


图 11.1-5

根据图象回答下列问题：

- (1) 菜地离小明家多远？小明走到菜地用了多少时间？
- (2) 小明给菜地浇水用了多少时间？
- (3) 菜地离玉米地多远？小明从菜地到玉米地用了多少时间？
- (4) 小明给玉米地锄草用了多少时间？
- (5) 玉米地离小明家多远？小明从玉米地走回家的平均速度是多少？

**分析：**小明离家的距离  $y$  是时间  $x$  的函数，从图象中有两段是平行于  $x$  轴的线段可知，小明离家后有两段时间内先后停留在菜地与玉米地。

**解：**(1) 由纵坐标看出，菜地离小明家 1.1 千米；由横坐标看出，小明走到菜地用了 15 分。

(2) 由横坐标看出，小明给菜地浇水用了 10(即  $25-15$ ) 分。

(3) 由纵坐标看出，菜地离玉米地 0.9(即  $2-1.1$ ) 千米；由横坐标看出，小明从菜地到玉米地用了 12(即  $37-25$ ) 分。

(4) 由横坐标看出，小明给玉米地锄草用了 18(即  $55-37$ ) 分。

(5) 由纵坐标看出, 玉米地离小明家 2 千米; 由横坐标看出, 小明从玉米地走回家用了 25(即 80-55) 分, 平均速度是 0.08 千米/分.

**例 3** 在下列式子中, 对于  $x$  的每一确定的值,  $y$  有唯一的对应值, 即  $y$  是  $x$  的函数, 画出这些函数的图象:

$$(1) y=x+0.5; \quad (2) y=\frac{6}{x} (x>0).$$

解: (1)  $y=x+0.5$ .

从上式可以看出,  $x$  取任意实数式子都有意义, 所以  $x$  的取值范围是全体实数.

从  $x$  的取值范围内选取一些数值, 算出  $y$  的对应值, 列表 (计算并填写表中空格):

$x$	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$y$	...			-0.5	0.5	1.5	2.5		...

根据表中数值描点  $(x, y)$ , 并用平滑曲线连接这些点 (图 11.1-6).

你画出的图象  
与图 11.1-6 相同  
吗?

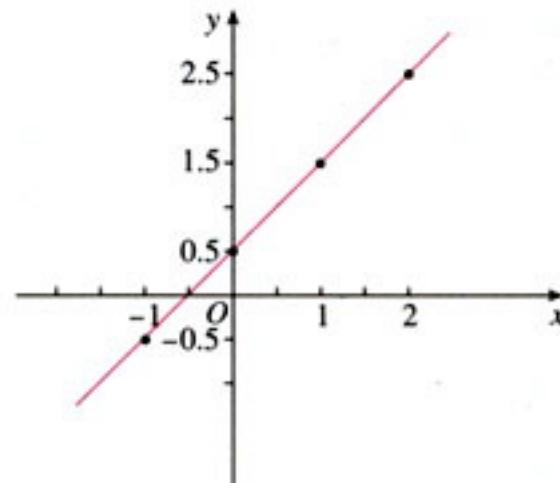


图 11.1-6

自变量的  
取值不能使  
函数解析式  
的分母为 0.

从函数图象可以看出, 直线从左向右上升, 即当  $x$  由小变大时,  $y=x+0.5$  随之增大.

$$(2) y=\frac{6}{x} (x>0).$$

列表 (计算并填写表中空格):

$x$	...	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	5	6	...
$y$	...		6		3		2		1.5			...

根据表中数值描点  $(x, y)$ ，并用平滑曲线连接这些点（图 11.1-7）。

你画出的图象

与图 11.1-7 相同  
吗？

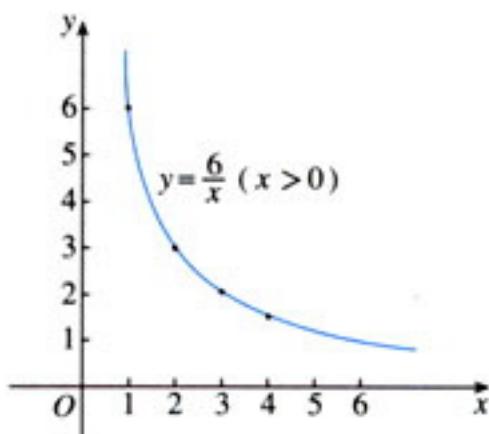


图 11.1-7

从函数图象可以看出，曲线从左向右下降，即当  $x$  由小变大时， $y = \frac{6}{x}$  随之减小。

### 归 纳

描点法画函数图象的一般步骤如下：

第一步：列表（表中给出一些自变量的值及其对应的函数值）；

第二步：描点（在直角坐标系中，以自变量的值为横坐标，相应的函数值为纵坐标，描出表格中数值对应的各点）；

第三步：连线（按照横坐标由小到大的顺序把所描出的各点用平滑曲线连接起来）。



## 思考

(1) 图 11.1-8 是一种古代计时器——“漏壶”的示意图，在壶内盛一定量的水，水从壶下的小孔漏出，壶壁内画出刻度，人们根据壶中水面的位置计算时间。用  $x$  表示时间， $y$  表示壶底到水面的高度，下面的哪个图象适合表示一小段时间内  $y$  与  $x$  的函数关系（暂不考虑水量变化对压力的影响）？

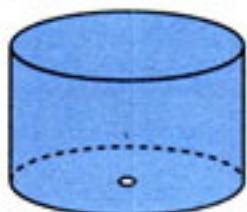
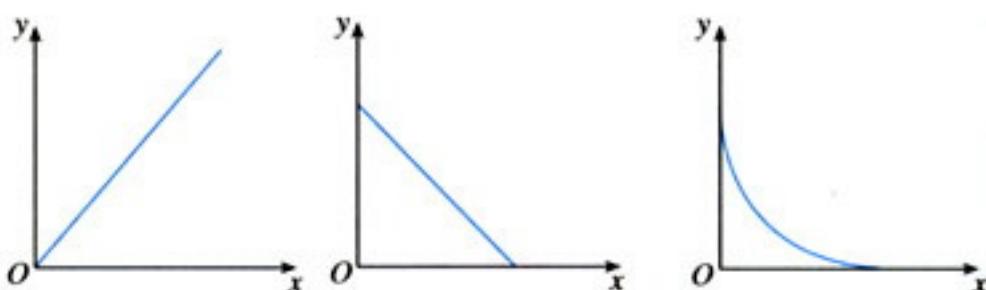


图 11.1-8



(2)  $a$  是自变量  $x$  取值范围内的任意一个值，过点  $(a, 0)$  画  $y$  轴的平行线，与图中曲线相交。下列哪个图中的曲线（图 11.1-9）表示  $y$  是  $x$  的函数？为什么？

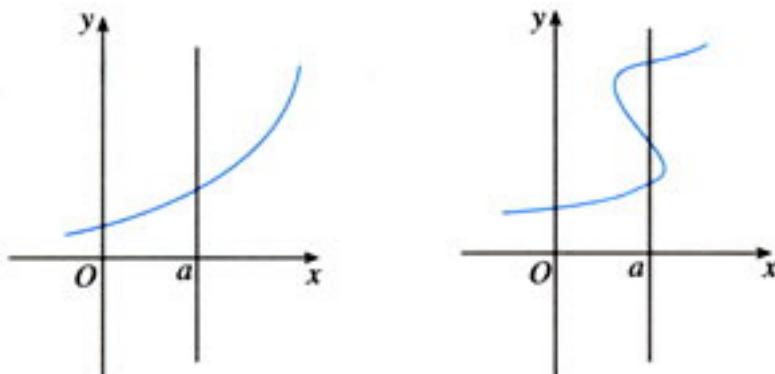
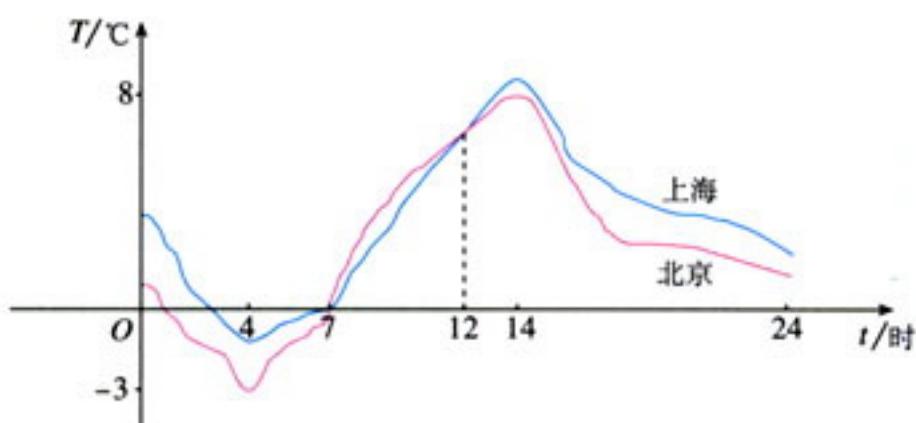


图 11.1-9

(提示：当  $x=a$  时， $x$  的函数  $y$  只能有一个函数值。)

### 练习

1. (1) 画出函数  $y=2x-1$  的图象；  
(2) 判断点  $A(-2.5, -4)$ ,  $B(1, 3)$ ,  $C(2.5, 4)$  是否在函数  $y=2x-1$  的图象上.
2. 下图是北京与上海在某一天的气温随时间变化的图象.



(第2题)

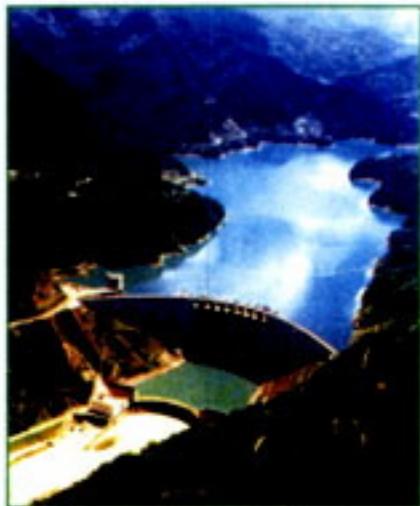
- (1) 这一天内，上海与北京何时温度相同？  
(2) 这一天内，上海在哪段时间比北京温度高？在哪段时间比北京温度低？
3. (1) 画出函数  $y=x^2$  的图象.  
(2) 从图象中观察，当  $x < 0$  时， $y$  随  $x$  的增大而增大，还是  $y$  随  $x$  的增大而减小？当  $x > 0$  时呢？

我们已经看到或亲自动手用列表格、写式子和画图象的方法表示了一些函数，这三种表示函数的方法分别称为列表法、解析式法和图象法.



从前面的例子看，你认为三种表示函数的方法各有什么优点？

表示函数时，要根据具体情况选择适当的方法，有时为全面地认识问题，需要几种方法同时使用.



**例4** 一水库的水位在最近5小时内持续上涨，下表记录了这5小时的水位高度。

$t$ / 时	0	1	2	3	4	5
$y$ / 米	10	10.05	10.10	10.15	10.20	10.25

(1) 由记录表推出这5小时内水位高度  $y$  (单位：米) 随时间  $t$  (单位：时) 变化的函数解析式，并画出函数图象；

(2) 据估计这种上涨的情况还会持续2小时，预测再过2小时水位高度将达到多少米。

**分析：**记录表已经通过6组数值反映了时间  $t$  与水位  $y$  之间的对应关系，我们现在需要从这些数值找出这两个变量之间的一般联系规律，由它写出函数解析式，画出函数图象，进而预测水位。

**解：**(1) 由表中观察到开始水位高10米，以后每隔1小时，水位升高0.05米，这样的变化规律可以表示为

$$y=0.05t+10 \quad (0 \leq t \leq 7).$$

这个函数的图象如图11.1-10中所示。

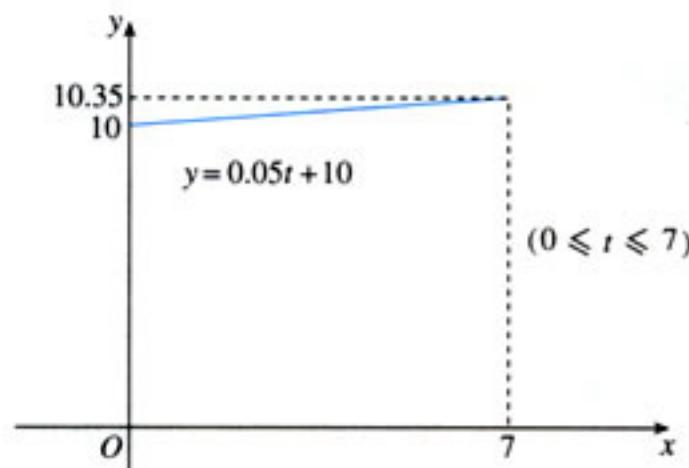


图 11.1-10

(2) 再过2小时的水位高度，就是  $t=5+2=7$  时  $y=0.05t+10$  的函数值，从解析式容易算出

$$y=0.05 \times 7+10=10.35.$$

从函数图象也能估出这个值。

2小时后，预计水位高10.35米。

由例 4 可以看出函数的不同表示法之间可以转化.

## 练习

- 用列表法与解析式法表示  $n$  边形的内角和  $m$  是边数  $n$  的函数.
- 用解析式法与图象法表示等边三角形的周长  $l$  是边长  $a$  的函数.

## 习题11.1

## 复习巩固 ►►

- 购买一些铅笔, 单价为 0.2 元/枝, 总价  $y$  元随铅笔枝数  $x$  变化, 指出其中的常量与变量, 自变量与函数, 并写出函数关系式.
- 一个三角形的底边长 5 cm, 高  $h$  可以任意伸缩, 写出面积  $S$  随  $h$  变化的关系式, 并指出其中的常量与变量, 自变量与函数, 以及自变量的取值范围.
- 下列式子中的  $y$  是  $x$  的函数吗? 为什么? 请再举出一些函数的例子.

$$(1) y=3x-5; \quad (2) y=\frac{x-2}{x-1}; \quad (3) y=\sqrt{x-1}.$$



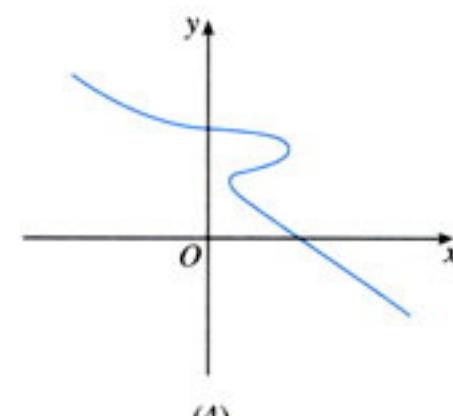
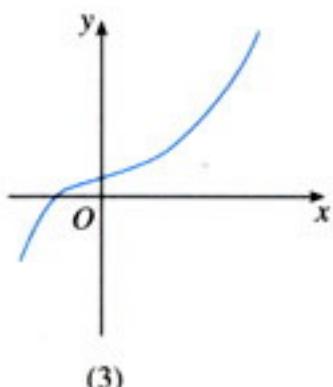
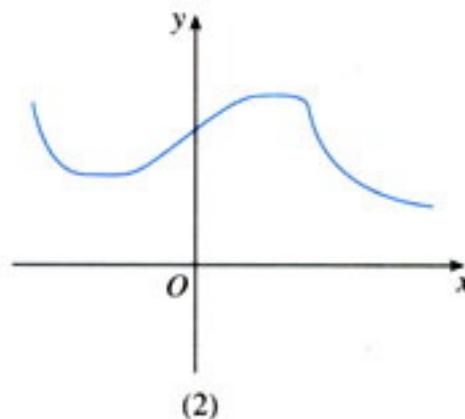
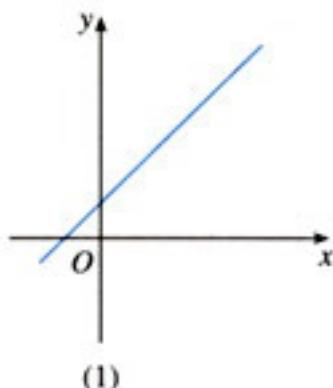
4. 分别对第3题的各式讨论:

(1) 自变量  $x$  在什么范围内取值时函数关系式有意义?

(2) 当  $x=5$  时对应的函数值是多少?

5. 画出函数  $y=0.5x$  的图象, 指出自变量及其取值范围.

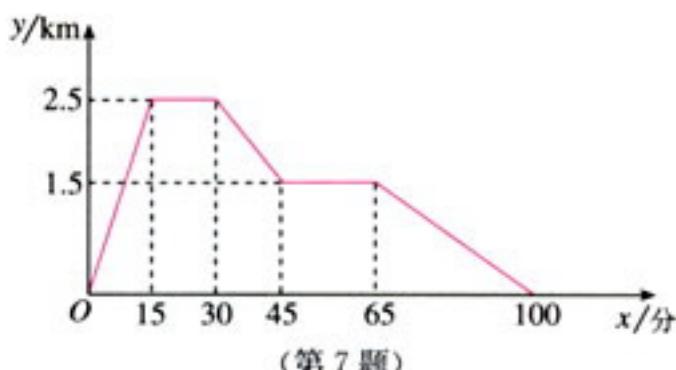
6. 下列各曲线中哪些表示  $y$  是  $x$  的函数?



(第6题)

### 综合运用

7. 下面的图象反映的过程是: 张强从家跑步去体育场, 在那里锻炼了一阵后又走到文具店去买笔, 然后散步走回家. 其中  $x$  表示时间,  $y$  表示张强离家的距离.



根据图象回答下列问题:

(1) 体育场离张强家多远? 张强从家到体育场用了多少时间?

- (2) 体育场离文具店多远?  
(3) 张强在文具店逗留了多少时间?  
(4) 张强从文具店回家的平均速度是多少?
8. 某种活期储蓄的月利率是 $0.06\%$ , 存入 $100$ 元本金, 求本息和(本金与利息的和) $y$ 元随所存月数 $x$ 变化的函数解析式, 并计算存期为4个月时的本息和.
9. 正方形边长为3, 若边长增加 $x$ 则面积增加 $y$ , 求 $y$ 随 $x$ 变化的函数解析式, 指出自变量、函数, 并以表格形式表示当 $x$ 等于1, 2, 3, 4时 $y$ 的值.
10. 甲车速度为20米/秒, 乙车速度为25米/秒, 现甲车在乙车前面500米, 设 $x$ 秒后两车之间的距离为 $y$ 米, 求 $y$ 随 $x$  ( $0 \leq x \leq 100$ ) 变化的函数解析式, 并画出函数图象.

### 拓广探索 ►►

11. 平面内的1条直线可以把平面分成2部分, 2条直线最多可以把平面分成4部分, 画图看看3条直线最多可以把平面分成几部分, 4条直线呢? 你能不能想出 $n$ 条直线最多可以把平面分成几部分? 所得结果是 $n$ 的函数吗?  
(提示:  $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ .)
12. 在同一直角坐标系中分别画出函数 $y=x$ 与 $y=\frac{1}{x}$ 的图象, 试用这两个图象说明何时 $x$ 比 $\frac{1}{x}$ 大, 何时 $x$ 比 $\frac{1}{x}$ 小.



### 信息技术应用

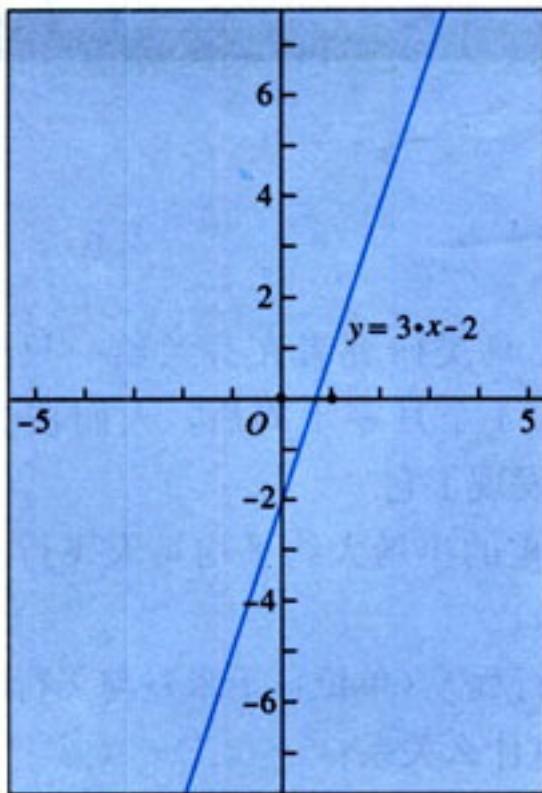
选学

### 用计算机画函数图象

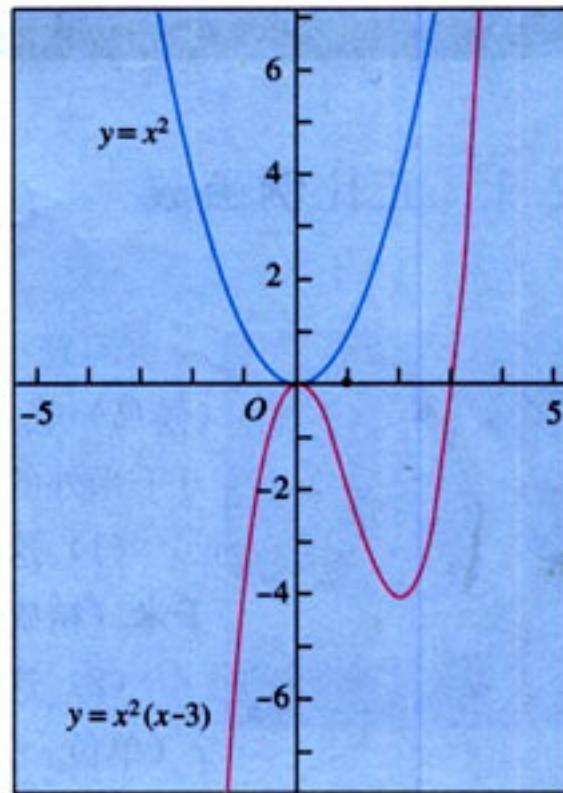
由解析式画函数图象时, 一般采用描点连线法, 描出的点越多, 画出的函数图象越准确. 但是, 仅靠手工操作有时很难画出准确的图象. 计算机可以帮助我们又快又准地画函数图象, 下面介绍用《几何画板》软件画函数图象的一些例子.

**例 1** 画函数  $y=3x-2$  的图象.

《几何画板》软件具有绘制函数图象的功能 (new function / graph), 启用这个功能, 输入函数  $y=3x-2$  的解析式, 计算机便自动画出如下图象 (图 1 中的直线).



(图 1)



(图 2)

**例 2** 画函数  $y=x^2$  与  $y=x^2(x-3)$  的图象 (图 2 中蓝色的曲线与红色的曲线).  
从画出的函数图象可以看出, 函数图象与函数性质之间存在着必然的联系. 例如

图象特征		函数变化规律
由左至右曲线呈上升状态	$\Leftrightarrow$	$y$ 随 $x$ 的增大而增大
由左至右曲线呈下降状态	$\Leftrightarrow$	$y$ 随 $x$ 的增大而减小
曲线上的最高点是 $(a, b)$	$\Leftrightarrow$	$x=a$ 时, $y$ 有最大值 $b$
曲线上的最低点是 $(a, b)$	$\Leftrightarrow$	$x=a$ 时, $y$ 有最小值 $b$

根据上面例子中的函数图象, 你发现这些函数各具有什么性质?

## 11.2 一次函数

### 11.2.1 正比例函数



**问题** 1996年，鸟类研究者在芬兰给一只燕鸥（候鸟）套上标志环；4个月零1周后，人们在2.56万千米外的澳大利亚发现了它。

- (1) 这只百余克重的小鸟大约平均每天飞行多少千米（精确到10千米）？
- (2) 这只燕鸥的行程 $y$ （单位：千米）与飞行时间 $x$ （单位：天）之间有什么关系？
- (3) 这只燕鸥飞行1个半月的行程大约是多少千米？

**分析：**(1) 这只燕鸥大约平均每天飞行的路程不少于

$$25\ 600 \div (30 \times 4 + 7) \approx 200(\text{km}).$$

(2) 假设这只燕鸥每天飞行的路程为200 km，那么它的行程 $y$ （单位：千米）就是飞行时间 $x$ （单位：天）的函数，函数解析式为

$$y = 200x \quad (0 \leq x \leq 127).$$

(3) 这只燕鸥飞行1个半月的行程，大约是 $x=45$ 时函数 $y=200x$ 的值，即

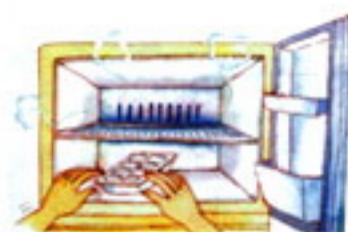
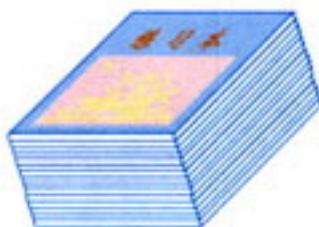
$$y = 200 \times 45 = 9\ 000 \text{ (km)}.$$

以上我们用函数 $y=200x$ 对燕鸥的飞行路程问题进行了刻画，尽管这只是近似的，但它可以作为反映燕鸥的行程与时间的对应规律的一个模型。


**思 考**

下列问题中的变量对应规律可用怎样的函数表示？这些函数有什么共同点？

- (1) 圆的周长  $l$  随半径  $r$  的大小变化而变化；
- (2) 铁的密度为  $7.8 \text{ g/cm}^3$ ，铁块的质量  $m$ （单位：g）随它的体积  $V$ （单位： $\text{cm}^3$ ）的大小变化而变化；
- (3) 每个练习本的厚度为  $0.5 \text{ cm}$ ，一些练习本摞在一起的总厚度  $h$ （单位： $\text{cm}$ ）随这些练习本的本数  $n$  的变化而变化；
- (4) 冷冻一个  $0^\circ\text{C}$  的物体，使它每分下降  $2^\circ\text{C}$ ，物体的温度  $T$ （单位： $^\circ\text{C}$ ）随冷冻时间  $t$ （单位：分）的变化而变化.



可以得出上面问题中的函数分别为：

$$\begin{array}{ll} (1) l=2\pi r; & (2) m=7.8V; \\ (3) h=0.5n; & (4) T=-2t. \end{array}$$


**归 纳**

正如函数  $y=200x$  一样，上面这些函数都是常数与自变量的乘积的形式。

一般地，形如  $y=kx$  ( $k$  是常数， $k \neq 0$ ) 的函数，叫做**正比例函数** (proportional function)，其中  $k$  叫做比例系数。

**例 1** 画出下列正比例函数的图象：

$$(1) y=2x; \quad (2) y=-2x.$$

解：(1) 函数  $y=2x$  中自变量  $x$  可以是任意实数，  
列表表示几组对应值（填空）：

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y$							

画出函数  $y=2x$  的图象。

你画出的图象与图 11.2-1 相同吗？

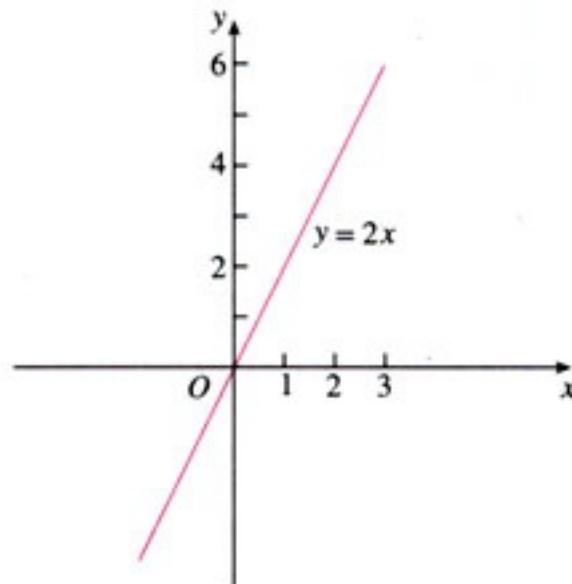


图 11.2-1

(2) 请你独立地画出函数  $y=-2x$  的图象。  
你画出的图象与图 11.2-2 相同吗？

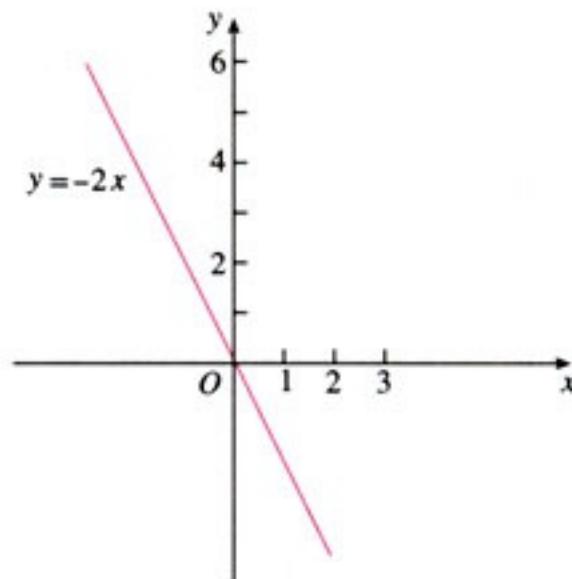


图 11.2-2



### 观察

比较上面两个函数的图象的相同点与不同点，考虑两个函数的变化规律。

填写你发现的规律：两图象都是经过原点的\_\_\_\_\_。函数  $y=2x$  的图象从左向右\_\_\_\_\_，经过第\_\_\_\_\_象限；函数  $y=-2x$  的图象从左向右\_\_\_\_\_，经过第\_\_\_\_\_象限。



### 练习

在同一坐标系中，画出下列函数的图象，并对它们进行比较：

$$(1) \quad y = \frac{1}{2}x;$$

$$(2) \quad y = -\frac{1}{2}x.$$

一般地，正比例函数的  $y=kx$  ( $k$  是常数， $k \neq 0$ ) 的图象是一条经过原点的直线，我们称它为直线  $y=kx$ 。当  $k > 0$  时，直线  $y=kx$  经过第三、一象限，从左向右上升，即随着  $x$  的增大  $y$  也增大；当  $k < 0$  时，直线  $y=kx$  经过第二、四象限，从左向右下降，即随着  $x$  的增大  $y$  反而减小。



### 思考

经过原点与点  $(1, k)$  的直线是哪个函数的图象？画正比例函数的图象时，怎样画最简单？为什么？

### 练习

用你认为最简单的方法画出下列函数的图象：

$$(1) y = \frac{3}{2}x; \quad (2) y = -3x.$$

## 11.2.2 一次函数



**问题** 某登山队大本营所在地的气温为 $5^{\circ}\text{C}$ ，海拔每升高 $1\text{ km}$ 气温下降 $6^{\circ}\text{C}$ ，登山队员由大本营向上登高 $x\text{ km}$ 时，他们所在位置的气温是 $y^{\circ}\text{C}$ ，试用解析式表示 $y$ 与 $x$ 的关系。

**分析：** $y$ 随 $x$ 变化的规律是，从大本营向上当海拔增加 $x\text{ km}$ 时，气温从 $5^{\circ}\text{C}$ 减少 $6x^{\circ}\text{C}$ 。因此 $y$ 与 $x$ 的函数关系为

$$y = 5 - 6x.$$

这个函数也可以写为

$$y = -6x + 5.$$

当登山队员由大本营向上登高 $0.5\text{ km}$ 时，他们所在位置的气温就是 $x=0.5$ 时函数 $y=-6x+5$ 的值，即 $y=-6\times 0.5+5=2(^{\circ}\text{C})$ 。



下列问题中变量间的对应关系可用怎样的函数表示？这些函数有什么共同点？

(1) 有人发现，在 $20\sim25$  °C时蟋蟀每分鸣叫次数  $c$  与温度  $t$  (单位: °C) 有关，即  $c$  的值约是  $t$  的 7 倍与 35 的差；

(2) 一种计算成年人标准体重  $G$  (单位: 千克) 的方法是，以厘米为单位量出身高值  $h$  减常数 105，所得差是  $G$  的值；

(3) 某城市的市内电话的月收费额  $y$  (单位: 元) 包括：月租费 22 元，拨打电话  $x$  分的计时费按 0.01 元/分收取；

(4) 把一个长 10 cm、宽 5 cm 的长方形的长减少  $x$  cm，宽不变，长方形的面积  $y$  (单位:  $\text{cm}^2$ ) 随  $x$  的值而变化。

可以得出上面问题中的函数解析式分别为：

$$(1) c=7t-35; \quad (2) G=h-105;$$

$$(3) y=0.01x+22; \quad (4) y=-5x+50.$$

### 归 纳

正如函数  $y=-6x+5$  一样，上面这些函数的形式都是自变量  $x$  的  $k$  (常数) 倍与一个常数的和。

一般地，形如  $y=kx+b$  ( $k, b$  是常数， $k\neq 0$ ) 的函数，叫做**一次函数** (linear function)。当  $b=0$  时， $y=kx+b$  即  $y=kx$ ，所以说正比例函数是一种特殊的一次函数。

### 练习

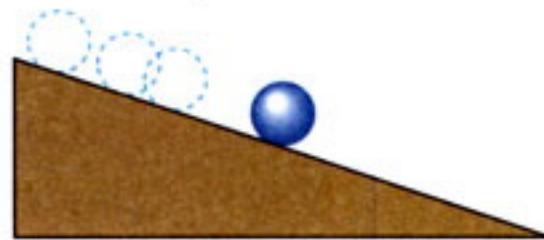
1. 下列函数中哪些是一次函数，哪些又是正比例函数？

$$(1) y = -8x; \quad (2) y = \frac{-8}{x}; \quad (3) y = 5x^2 + 6; \quad (4) y = -0.5x - 1.$$

2. 一个小球由静止开始在一个斜坡向下滚动，其速度每秒增加 2 米。

- (1) 求小球速度  $v$  随时间  $t$  变化的函数关系式，它是一次函数吗？  
 (2) 求第 2.5 秒时小球的速度。

3. 汽车油箱中原有油 50 升，如果行驶中每小时用油 5 升，求油箱中的油量  $y$ （单位：升）随行驶时间  $x$ （单位：时）变化的函数关系式，并写出自变量  $x$  的取值范围。 $y$  是  $x$  的一次函数吗？



(第 2 题)

**例 2** 画出函数  $y = -6x$  与  $y = -6x + 5$  的图象。

**解：**函数  $y = -6x$  与  $y = -6x + 5$  中，自变量  $x$  可以是任意实数，列表表示几组对应值（填空）：

$x$	-2	-1	0	1	2
$y = -6x$					
$y = -6x + 5$					

画出函数  $y = -6x$   
与  $y = -6x + 5$  的图象。  
你画出的图象与图  
11.2-3 相同吗？

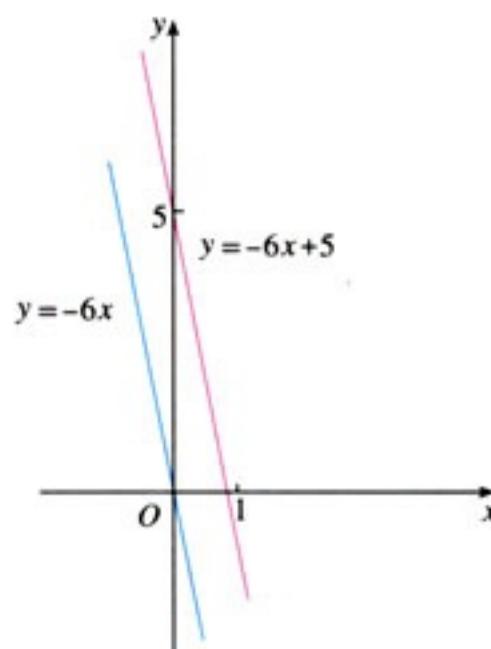


图 11.2-3



## 观察

比较上面两个函数的图象的相同点与不同点.

填出你的观察结果: 这两个函数的图象形状都是\_\_\_\_\_, 并且倾斜程度\_\_\_\_\_. 函数  $y = -6x$  的图象经过原点, 函数  $y = -6x + 5$  的图象与  $y$  轴交于点\_\_\_\_\_, 即它可以看作由直线  $y = -6x$  向\_\_\_\_平移\_\_\_\_个单位长度而得到. 比较两个函数解析式, 试解释这是为什么.

**猜想** 联系上面例 2, 考虑一次函数  $y = kx + b$  的图象是什么形状, 它与直线  $y = kx$  有什么关系?

比较这两个函数的解析式, 容易得出:

一次函数  $y = kx + b$  的图象是一条直线, 我们称它为直线  $y = kx + b$ , 它可以看作由直线  $y = kx$  平移  $|b|$  个单位长度而得到(当  $b > 0$  时, 向上平移; 当  $b < 0$  时, 向下平移).

**例 3** 画出函数  $y = 2x - 1$  与  $y = -0.5x + 1$  的图象.

**分析:** 由于一次函数的图象是直线, 所以只要确定两个点就能画出它.

**解:**

$x$	0	1
$y = 2x - 1$	-1	1
$y = -0.5x + 1$	1	0.5

先画直线  $y = 2x$  与  $y = -0.5x$ , 再平移它们, 也能得直线  $y = 2x - 1$  与  $y = -0.5x + 1$ .

过点  $(0, -1)$  与点  $(1, 1)$  画出直线  $y = 2x - 1$ ; 过点  $(0, 1)$  与点  $(1, 0.5)$  画出直线  $y = -0.5x + 1$  (图 11.2-4).

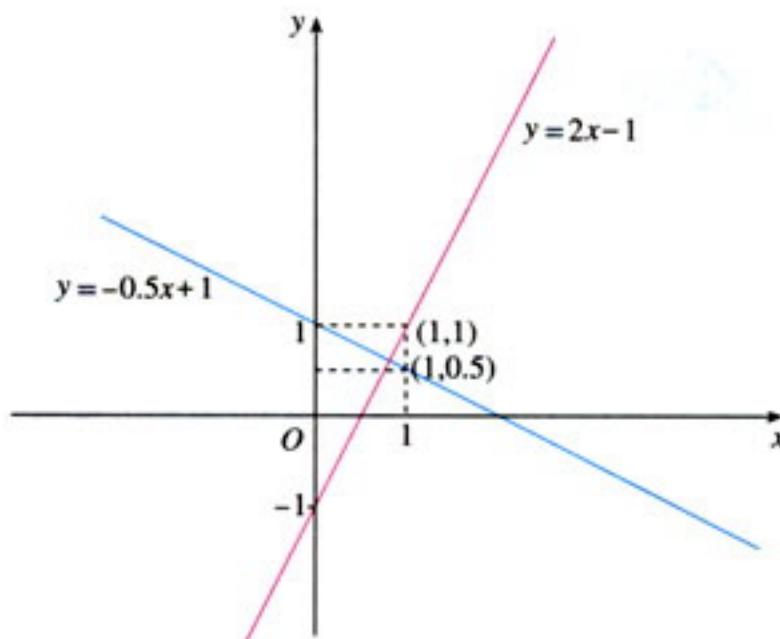


图 11.2-4

### 探究

画出函数  $y=x+1$ ,  $y=-x+1$ ,  $y=2x+1$ ,  $y=-2x+1$  的图象, 由它们联想: 一次函数解析式  $y=kx+b$  ( $k$ ,  $b$  是常数,  $k \neq 0$ ) 中,  $k$  的正负对函数图象有什么影响?

我们先通过观察发现图象(形)的规律, 后又根据它得出关于数值大小的性质, 这种数形结合的探究方法在数学学习中很重要.

观察前面一次函数的图象, 可以发现规律:  
当  $k > 0$  时, 直线  $y = kx + b$  由左至右上升; 当  $k < 0$  时, 直线  $y = kx + b$  由左至右下降. 由此填出: 一次函数  $y = kx + b$  ( $k$ ,  $b$  是常数,  $k \neq 0$ ) 具有如下性质:

当  $k > 0$  时,  $y$  随  $x$  的增大而\_\_\_\_\_;  
当  $k < 0$  时,  $y$  随  $x$  的增大而\_\_\_\_\_.

### 练习

- 直线  $y=2x-3$  与  $x$  轴交点坐标为 \_\_\_\_\_；与  $y$  轴交点坐标为 \_\_\_\_\_；图象经过 \_\_\_\_\_ 象限， $y$  随  $x$  的增大而 \_\_\_\_\_。
- 在同一直角坐标系中画出下列函数的图象，每小题中三个函数的图象有什么关系？
  - $y=x-1$ ,  $y=x$ ,  $y=x+1$ ;
  - $y=-2x-1$ ,  $y=-2x$ ,  $y=-2x+1$ .
- 在同一直角坐标系中画出下列函数的图象，并指出它们的共同之处：  
 $y=\frac{1}{2}x+1$ ,  $y=x+1$ ,  $y=2x+1$ ,  $y=-x+1$ .

因为图象过  $(3, 5)$  与  $(-4, -9)$  点，所以这两点的坐标必适合解析式。

像例 4 这样先设出函数解析式，再根据条件确定解析式中未知的系数，从而具体写出这个式子的方法，叫做待定系数法。

**例 4** 已知一次函数的图象过点  $(3, 5)$  与  $(-4, -9)$ ，求这个一次函数的解析式。

**分析：**求一次函数  $y=kx+b$  的解析式，关键是求出  $k, b$  的值，从已知条件可以列出关于  $k, b$  的二元一次方程组，并求出  $k, b$ 。

**解：**设这个一次函数的解析式为  $y=kx+b$ 。因为  $y=kx+b$  的图象过点  $(3, 5)$  与  $(-4, -9)$ ，所以

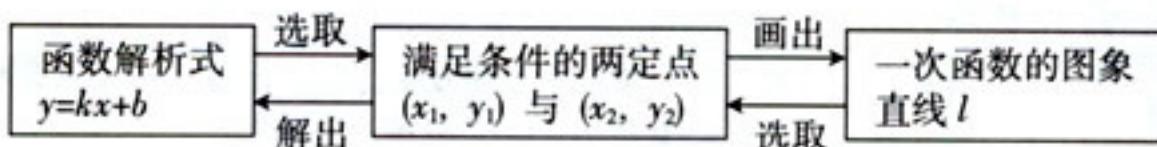
$$\begin{cases} 3k+b=5, \\ -4k+b=-9. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} k=2, \\ b=-1. \end{cases}$$

这个一次函数的解析式为  $y=2x-1$ 。

例3与例4从两方面说明：



### 练习

- 已知一次函数  $y=kx+2$ , 当  $x=5$  时  $y$  的值为 4, 求  $k$  的值.
- 已知直线  $y=kx+b$  经过点  $(9, 0)$  和点  $(24, 20)$ , 求  $k, b$  的值.



**例5** 小芳以 200 米/分的速度起跑后, 先匀加速跑 5 分, 每分提高速度 20 米/分, 又匀速跑 10 分. 试写出这段时间里她的跑步速度  $y$  (单位: 米/分) 随跑步时间  $x$  (单位: 分) 变化的函数关系式, 并画出函数图象.

**分析:** 本题  $y$  随  $x$  变化的规律分成两段 (前 5 分与后 10 分), 写出  $y$  随  $x$  变化的函数关系式时要分成两部分, 画函数图象也要分成两段来画.

解:  $y = \begin{cases} 20x + 200 & (0 \leq x < 5), \\ 300 & (5 \leq x \leq 15). \end{cases}$

图 11.2-5 是这个函数的图象.

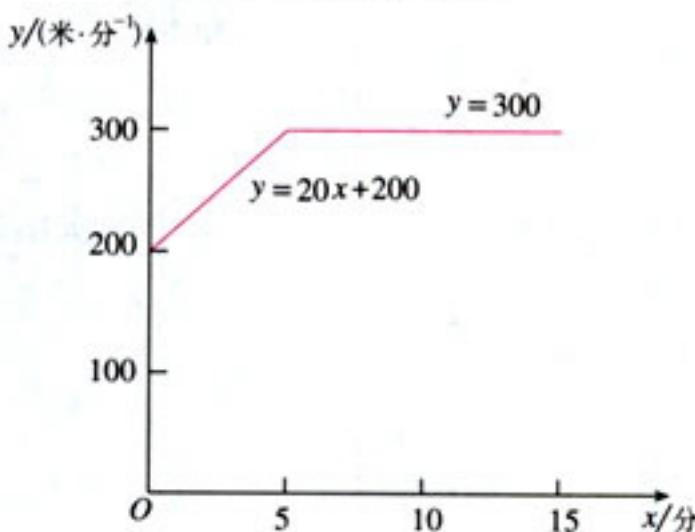
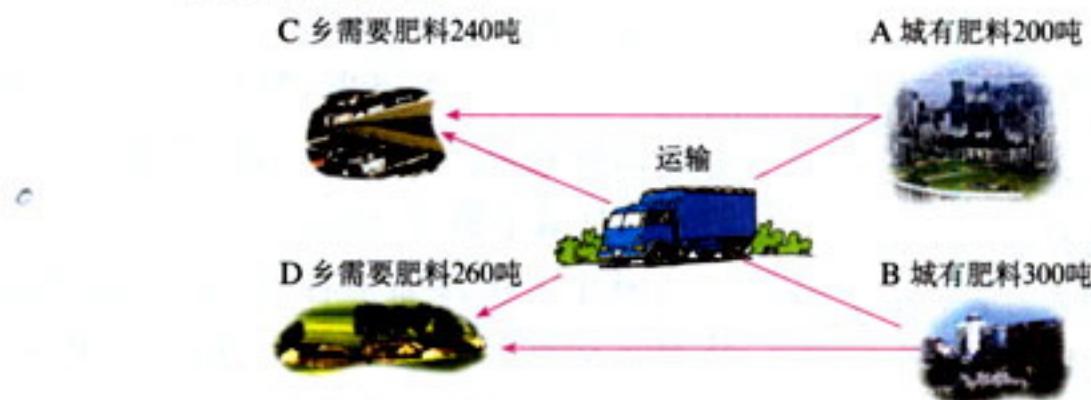


图 11.2-5

我们称  
此类函数为  
分段函数.

**例6** A城有肥料200吨，B城有肥料300吨，现要把这些肥料全部运往C、D两乡。从A城往C、D两乡运肥料的费用分别为每吨20元和25元；从B城往C、D两乡运肥料的费用分别为每吨15元和24元，现C乡需要肥料240吨，D乡需要肥料260吨，怎样调运总运费最少？



### 思考

影响总运费的变量有哪些？由A、B城分别运往C、D乡的肥料量共有几个量？这些量之间有什么关系？

可以发现，A—C，A—D，B—C，B—D运肥料共涉及4个数量。一方面，它们是影响总运费的变量；另一方面，它们互相联系，其中一个量确定后另外三个量随之确定。这样我们就可以设其中一个为变量 $x$ ，把其他量表示为含 $x$ 的式子（填空）。

收地 运地	C	D	总计
A	$x$ 吨	_____吨	200吨
B	_____吨	_____吨	300吨
总计	240吨	260吨	500吨

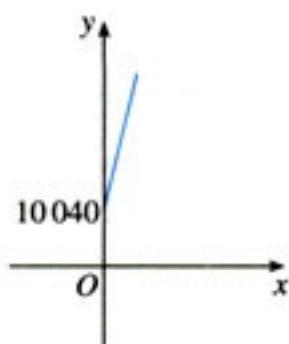


图 11.2-6

根据实际问题的需要，画函数图象时， $x$  轴和  $y$  轴的单位长度可以不同。

若 A 城有肥料 300 吨，B 城有肥料 200 吨，其他条件不变，又应怎样调运？

解：设总运费为  $y$  元，A 城运往 C 乡的肥料量为  $x$  吨，则运往 D 乡的肥料量为  $(200-x)$  吨；B 城运往 C、D 乡的肥料量分别为  $(240-x)$  吨与  $(60+x)$  吨。

由总运费与各运输量的关系可知，反映  $y$  与  $x$  之间关系的函数为

$$y=20x+25(200-x)+15(240-x)+24(60+x).$$

化简得

$$y=4x+10\,040 \quad (0 \leqslant x \leqslant 200).$$

由解析式与图象（图 11.2-6）可看出：当  $x=0$  时， $y$  有最小值 10 040。

因此，从 A 城运往 C 乡 0 吨，运往 D 乡 200 吨；从 B 城运往 C 乡 240 吨，运往 D 乡 60 吨，此时总运费最少，总运费最小值为 10 040 元。

解决含有多个变量的问题时，可以分析这些变量的关系，选取其中某个变量作为自变量，然后根据问题的条件寻求可以反映实际问题的函数。

### 练习

从 A、B 两水库向甲、乙两地调水，其中甲地需水 15 万吨，乙地需水 13 万吨，A、B 两水库各可调出水 14 万吨。从 A 地到甲地 50 千米，到乙地 30 千米；从 B 地到甲地 60 千米，到乙地 45 千米。设计一个调运方案使水的调运量（单位：万吨·千米）最小。

## 习题11.2

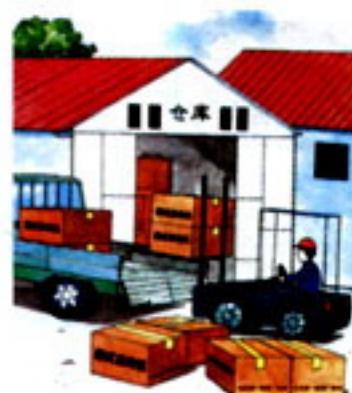
### 复习巩固 ►►

- 一列火车以90千米/时的速度匀速前进，求它的行驶路程 $s$ (单位：千米)随行驶时间 $t$ (单位：时)变化的函数关系式，画出函数图象。
- 函数 $y=-5x$ 的图象在第\_\_\_\_\_象限内，经过点 $(0, \underline{\hspace{1cm}})$ 与点 $(1, \underline{\hspace{1cm}})$ ， $y$ 随 $x$ 的增大而\_\_\_\_\_。
- 一个弹簧不挂重物时长12 cm，挂上重物后伸长的长度与所挂重物的质量成正比。如果挂上1 kg的物体后，弹簧伸长2 cm，求弹簧总长 $y$ (单位：cm)随所挂物体质量 $x$ (单位：kg)变化的函数关系式。
- 在同一直角坐标系中，画出函数 $y=2x+4$ 与 $y=-2x+4$ 的图象，指出每个函数中当 $x$ 增大时 $y$ 如何变化。
- 已知一个一次函数的图象经过点 $(-4, 9)$ 和点 $(6, 3)$ ，求这个函数的解析式。

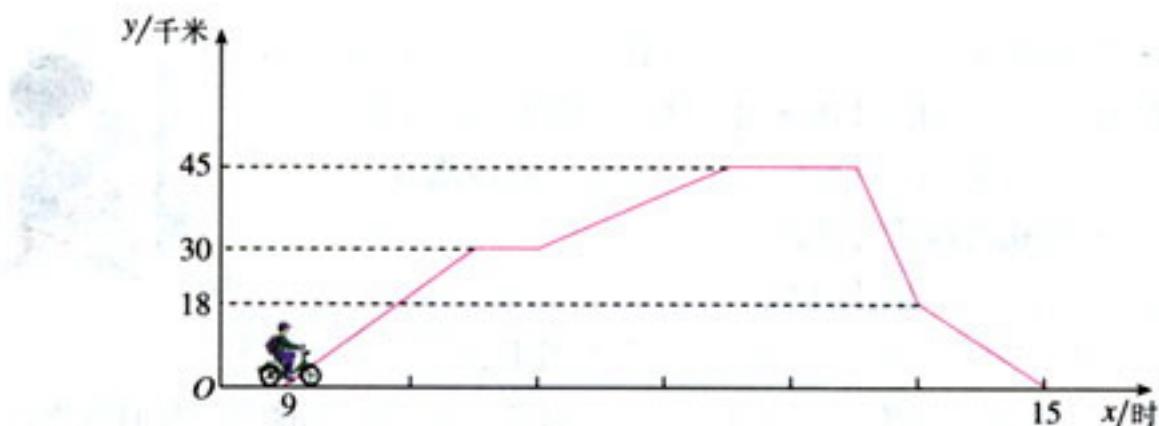


### 综合运用 ►►

- 一个函数的图象是经过原点的直线，并且这条直线过第四象限及点 $(2, -3a)$ 与点 $(a, -6)$ ，求这个函数的解析式。
- 点 $P(x, y)$ 在第一象限，且 $x+y=8$ ，点 $A$ 的坐标为 $(6, 0)$ ，设 $\triangle OPA$ 的面积为 $S$ 。
  - 用含 $x$ 的解析式表示 $S$ ，写出 $x$ 的取值范围，画出函数 $S$ 的图象。
  - 当点 $P$ 的横坐标为5时， $\triangle OPA$ 的面积为多少？
  - $\triangle OPA$ 的面积能大于24吗？为什么？
- 直线 $y=3x+4$ 与 $y=3x-4$ 具有什么样的位置关系？
- 某公司在A、B两地分别有库存机器16台和12台，现要运往甲、乙两地，其中甲地15台，乙地13台。从A地运一台到甲地的运费为500元，到乙地为400元；从B地运一台到甲地的运费为300元，到乙地为600元。公司应设计怎样的调运方案，能使这些机器的总运费最省？



10. 图中的折线表示一骑车人离家的距离  $y$  与时间  $x$  的关系. 骑车人 9:00 离开家, 15:00 回家, 请你根据这个折线图回答下列问题:
- 这个人什么时间离家最远? 这时他离家多远?
  - 何时他开始第一次休息? 休息多长时间? 这时他离家多远?
  - 11:00~12:30 他骑了多少千米?
  - 他在 9:00~10:30 和 10:30~12:30 的平均速度各是多少?
  - 他返家时的平均速度是多少?
  - 14:00 时他离家多远? 何时他距家 10 千米?



(第 10 题)

11. 一种出租车的收费方式如下: 4 千米以内 10 元, 4 千米至 15 千米部分每千米加收 1.2 元, 15 千米以上部分每千米加收 1.6 元, 某乘客要乘出租车去 50 千米处的某地.



- 如果乘客中途不换车要付车费多少元?
- 如果乘客中途换乘一辆出租车, 他在何处换比较合算? 算出总费用与 (1) 比较.



## 阅读与思考

选学

## 科学家如何测算地球的年龄

你知道如何测算地球的年龄吗? 在解决这个问题中也用到函数这个数学工具.

1896 年, 法国物理学家贝克勒尔发现, 钚的化合物能放射出一种肉眼看不见的射线,

这种射线可以使在黑纸里的照相底片感光. 这引起了科学家居里夫人的注意, 她又发现了一些放射性更强的元素. 1903年, 英国物理学家卢瑟福通过实验证实, 放射性物质在放出射线的同时, 本身有一部分“蜕变”为其他物质. 这种蜕变的规律是: 一种物质放出射线后, 这种物质的量将减少, 减少的速度开始较快, 后来较慢. 物质所剩的量与时间成指数函数关系. 这种函数我们还没有学过, 但可以从函数的图象中来认识它的变化规律. 图1为镭的放射规律.

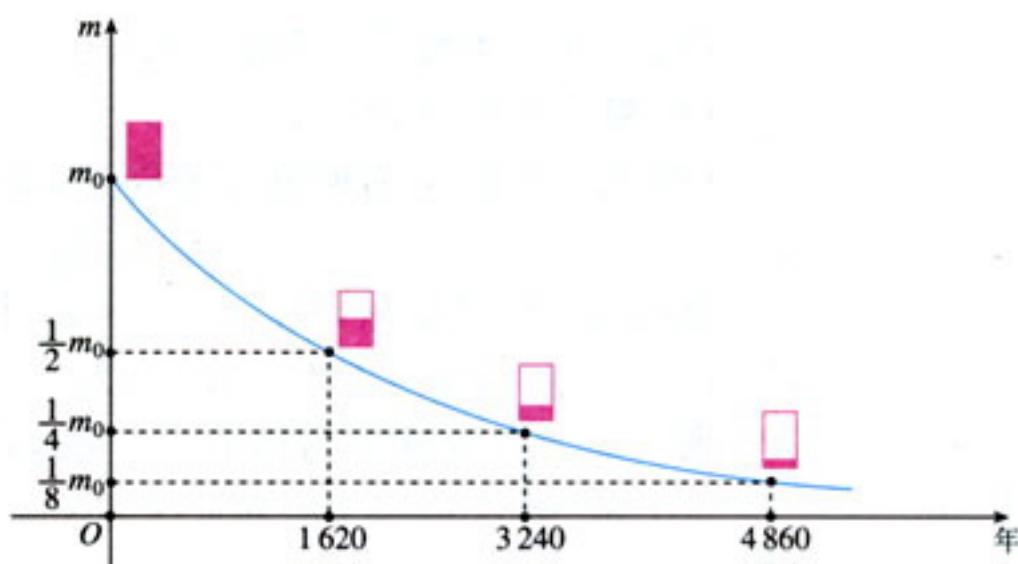


图1

由图象我们可以发现: 镭的质量由  $m_0$  缩减到  $\frac{1}{2}m_0$  约需 1 620 年, 由  $\frac{1}{2}m_0$  缩减到  $\frac{1}{4}m_0$  约需  $3 240 - 1 620 = 1 620$  (年), 由  $\frac{1}{4}m_0$  缩减到  $\frac{1}{8}m_0$  约需  $4 860 - 3 240 = 1 620$  (年), 即镭的质量缩减为原来的一半所用的时间是一个不变的量——1 620 年, 一般把 1 620 年称为镭的半衰期.

实际上, 所有的放射性物质都有自己的半衰期, 铀的半衰期为 45.6 亿年. 蜕变后的铀最后成为铅, 科学家们测出一块岩石中现在含铀和铅的质量, 便可以算出这块岩石原来的含铀量, 进而利用半衰期算出由原来含铀量到现在含铀量经过了多少时间, 从而推算出这块岩石的年龄. 正是利用这种方法, 科学家测算出地球上最古老的岩石的年龄约为 30 亿年. 当然, 地球年龄要比这更大一些, 估计有 45 亿 ~ 46 亿年.

## 11.3

# 用函数观点看方程（组）与不等式

### 11.3.1 一次函数与一元一次方程

我们先来看下面两个问题有什么关系：

(1) 解方程  $2x+20=0$ .

(2) 当自变量  $x$  为何值时函数  $y=2x+20$  的值为 0?

在问题(1)中，解方程  $2x+20=0$ ，得  $x=-10$ ；解问题(2)就是要考虑当函数  $y=2x+20$  的值为 0 时，所对应的自变量  $x$  为何值，这可以通过解方程  $2x+20=0$ ，得出  $x=-10$ . 因此这两个问题实际上是同一个问题.

从函数图象上看，直线  $y=2x+20$  与  $x$  轴交点的坐标是  $(-10, 0)$  (图 11.3-1)，这也说明，方程  $2x+20=0$  的解是  $x=-10$ .

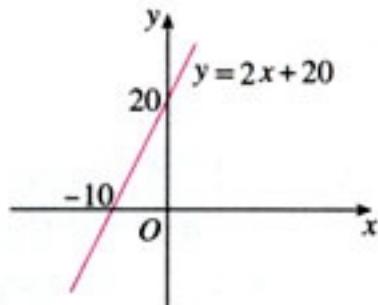


图 11.3-1



由上面两个问题的关系，能进一步得到“解方程  $ax+b=0$  ( $a, b$  为常数)”与“求自变量  $x$  为何值时，一次函数  $y=ax+b$  的值为 0”有什么关系？

由于任何一元一次方程都可以转化为  $ax+b=0$  ( $a, b$  为常数,  $a \neq 0$ ) 的形式, 所以解一元一次方程可以转化为: 当某个一次函数的值为 0 时, 求相应的自变量的值. 从图象上看, 这相当于已知直线  $y=ax+b$ , 确定它与  $x$  轴交点的横坐标的值.

**例 1** 一个物体现在速度是 5 米/秒, 其速度每秒增加 2 米/秒, 再过几秒它的速度为 17 米/秒?

**解法 1:** 设再过  $x$  秒物体的速度为 17 米/秒. 列方程

$$2x+5=17.$$

解得

$$x = 6.$$

**解法 2:** 速度  $y$  (单位: 米/秒) 是时间  $x$  (单位: 秒) 的函数

$$y=2x+5.$$

由

$$2x+5=17,$$

得

$$2x-12=0.$$

由图 11.3-2, 看出直线  $y=2x-12$  与  $x$  轴的交点为  $(6, 0)$ , 得  $x=6$ .

这两种  
解法分别从  
数与形两方  
面得出相同  
的结果.

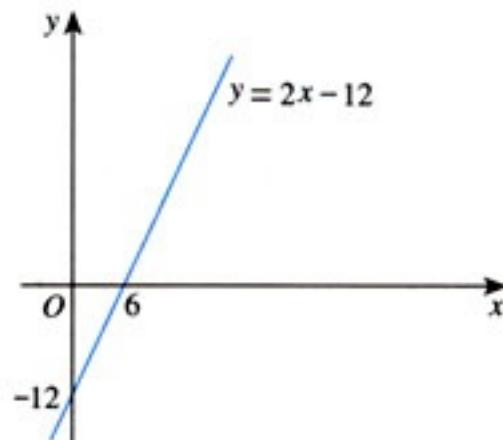


图 11.3-2

## 11.3.2 一次函数与一元一次不等式

看下面两个问题有什么关系：

- (1) 解不等式  $5x+6 > 3x+10$ .
- (2) 当自变量  $x$  为何值时函数  $y=2x-4$  的值大于 0?

在问题(1)中，不等式  $5x+6 > 3x+10$  可以转化为  $2x-4 > 0$ ，解这个不等式得  $x > 2$ ；解问题(2)就是要解不等式  $2x-4 > 0$ ，得出  $x > 2$  时函数  $y=2x-4$  的值大于 0，因此这两个问题实际上是同一个问题。从直线  $y=2x-4$  (图 11.3-3) 可以看出，当  $x > 2$  时这条直线上的点在  $x$  轴的上方，即这时  $y=2x-4 > 0$ 。

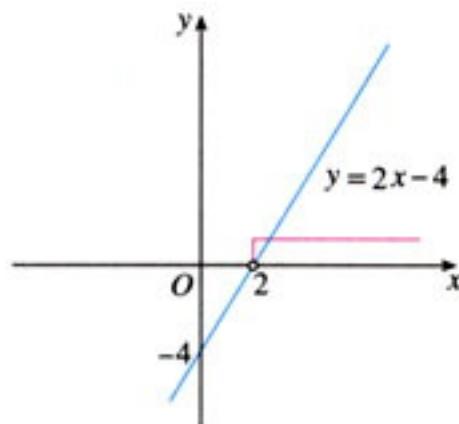


图 11.3-3



由上面两个问题的关系，能进一步得到“解不等式  $ax+b > 0$ ”与“求自变量  $x$  在什么范围内，一次函数  $y=ax+b$  的值大于 0”有什么关系？

由于任何一元一次不等式都可以转化为  $ax+b > 0$  或  $ax+b < 0$  ( $a, b$  为常数， $a \neq 0$ ) 的形式，所以解一元一次不等式可以看作：当一次函数值大（小）于 0 时，求自变量相应的取值范围。

**例2** 用画函数图象的方法解不等式  $5x+4 < 2x+10$ .

**解法1：**原不等式化为  $3x-6 < 0$ , 画出直线  $y=3x-6$  (图 11.3-4), 可以看出, 当  $x < 2$  时这条直线上的点在  $x$  轴的下方, 即这时  $y=3x-6 < 0$ , 所以不等式的解集为  $x < 2$ .

**解法2：**将原不等式的两边分别看作两个一次函数, 画出直线  $y=5x+4$  与直线  $y=2x+10$  (图 11.3-5), 可以看出, 它们交点的横坐标为 2, 当  $x < 2$  时, 对于同一个  $x$ , 直线  $y=5x+4$  上的点在直线  $y=2x+10$  上相应点的下方, 这时  $5x+4 < 2x+10$ , 所以不等式的解集为  $x < 2$ .

两种解法  
都把解不等式  
转化为比较直  
线上点的位置  
的高低.

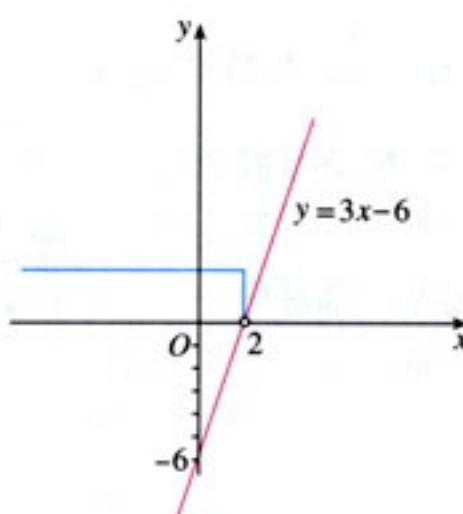


图 11.3-4

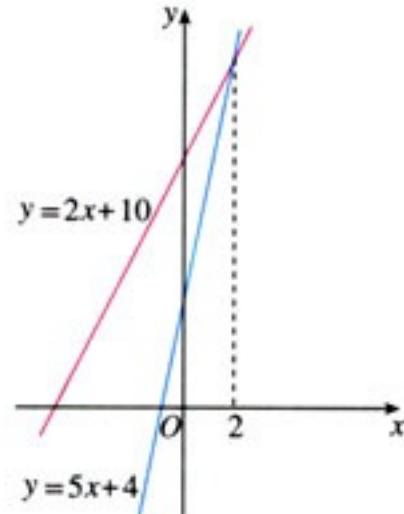


图 11.3-5

**归 纳**

虽然像上面那样用一次函数图象来解方程或不等式未必简单, 但是从函数角度看问题, 能发现一次函数、一元一次方程与一元一次不等式之间的联系, 能直观地看到怎样用图形来表示方程的解与不等式的解, 这种用函数观点认识问题的方法, 对于继续学习数学很重要.

### 练习

1. 当自变量  $x$  的取值满足什么条件时, 函数  $y=3x+8$  的值满足下列条件?  
(1)  $y=0$ ; (2)  $y=-7$ ;  
(3)  $y>0$ ; (4)  $y<2$ .
2. 利用函数图象解出  $x$ :  
(1)  $5x-1=2x+5$ ; (2)  $6x-4<3x+2$ .

### 11.3.3 一次函数与二元一次方程(组)

我们知道, 方程  $3x+5y=8$  可以转化为  $y=-\frac{3}{5}x+\frac{8}{5}$ , 并且直线  $y=-\frac{3}{5}x+\frac{8}{5}$  上每个点的坐标  $(x, y)$  都是方程  $3x+5y=8$  的解. 由于任意一个二元一次方程都可以转化为  $y=kx+b$  的形式, 所以每个二元一次方程都对应一个一次函数, 于是也对应一条直线.

解二元一次方程组

$$\begin{cases} 3x+5y=8, \\ 2x-y=1, \end{cases}$$

可以看作求两个一次函数  $y=-\frac{3}{5}x+\frac{8}{5}$  与  $y=2x-1$  图象的交点坐标 (图 11.3-6), 因此我们可以用画图象的方法解二元一次方程组.

你能归纳出图象法解二元一次方程组的具体方法吗?

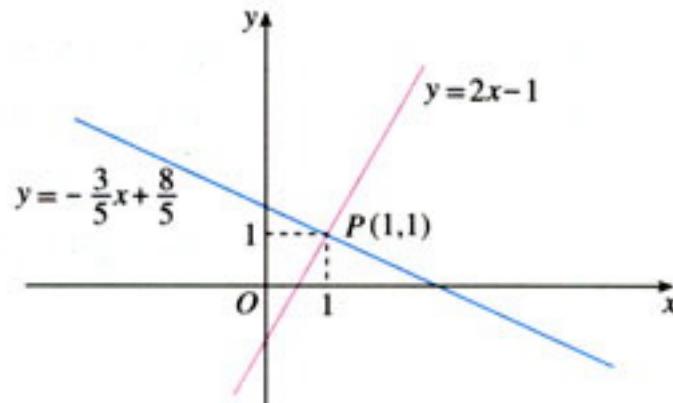


图 11.3-6

一般地，每个二元一次方程组都对应两个一次函数，于是也对应两条直线。从“数”的角度看，解方程组相当于考虑自变量为何值时两个函数的值相等，以及这个函数值是何值；从“形”的角度看，解方程组相当于确定两条直线交点的坐标。

综上所述，一次函数与二元一次方程(组)有密切的联系。

**例3** 一家电信公司给顾客提供两种上网收费方式：方式A以每分0.1元的价格按上网时间计费；方式B除收月基费20元外再以每分0.05元的价格按上网时间计费。如何选择收费方式能使上网者更合算？

**分析：**计费与上网时间有关，所以可设上网时间为 $x$ 分，分别写出两种计费方式的函数模型，然后再做比较。

**解法1：**设上网时间为 $x$ 分，若按方式A则收 $y=0.1x$ 元；若按方式B则收 $y=0.05x+20$ 元。

在同一直角坐标系中分别画出这两个函数的图象（图11.3-7）。

两直线的交点  
坐标是多少？

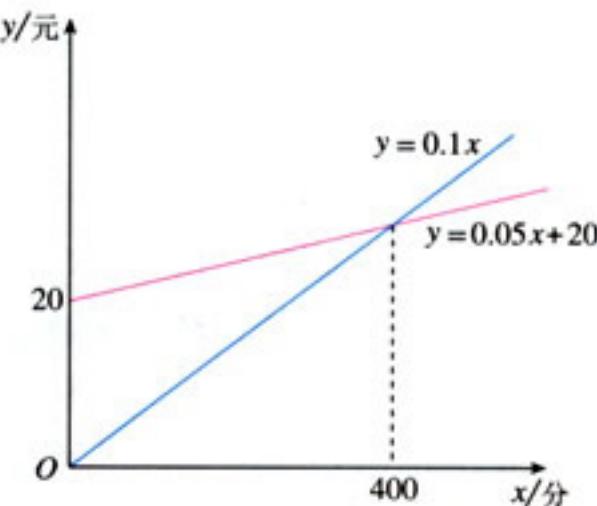


图11.3-7

解方程组 $\begin{cases} y=0.1x, \\ y=0.05x+20, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=400, \\ y=40. \end{cases}$ 所以两图象交于点(400, 40)。

由图象易知：

当  $0 < x < 400$  时,  $0.1x < 0.05x + 20$ ;

当  $x = 400$  时,  $0.1x = 0.05x + 20$ ;

当  $x > 400$  时,  $0.1x > 0.05x + 20$ .

因此, 当一个月内上网时间少于 400 分时, 选择方式 A 省钱; 当上网时间等于 400 分时, 选择方式 A、方式 B 没有区别; 当上网时间多于 400 分时, 选择方式 B 省钱.

**解法 2:** 设上网时间为  $x$  分, 方式 B 与方式 A 两种计费的差额为  $y$  元, 则  $y$  随  $x$  变化的函数关系式为

$$y = (0.05x + 20) - 0.1x,$$

化简得

$$y = \underline{\hspace{2cm}}.$$

在直角坐标系中画出这个函数的图象(图 11.3-8).

这个函数的图象是直线还是射线?

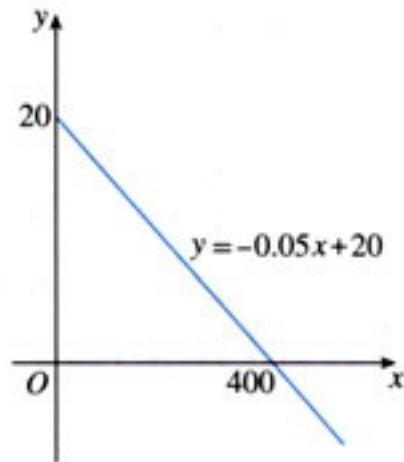


图 11.3-8

解方程  $-0.05x + 20 = 0$ , 得出直线  $y = -0.05x + 20$  与  $x$  轴的交点为  $(400, 0)$ .

由函数图象得:

当  $\underline{\hspace{2cm}}$  时,  $y > 0$ , 即选方式  $\underline{\hspace{2cm}}$  省钱;

当  $\underline{\hspace{2cm}}$  时,  $y = 0$ , 即方式 A, B  $\underline{\hspace{2cm}}$ ;

当  $\underline{\hspace{2cm}}$  时,  $y < 0$ , 即选方式  $\underline{\hspace{2cm}}$  省钱.

由此可得选择方案 (略).

## 归 纳

方程(组)、不等式与函数之间互相联系,用函数观点可以把它们统一起来.解决问题时,应根据具体情况灵活地、有机地把它们结合起来使用.

### 练习

在一元一次方程一章中,我们曾考虑过下面两种移动电话计费方式:

	全球通	神州行
月租费	50元/月	0
本地通话费	0.40元/分	0.60元/分

用函数方法解答如何选择计费方式更省钱.

## 习题11.3

### 复习巩固

- 当自变量  $x$  的取值满足什么条件时, 函数  $y=5x+17$  的值满足下列条件?
  - (1)  $y=0$ ;
  - (2)  $y=-7$ ;
  - (3)  $y=20$ .
- 利用函数图象解出  $x$ , 并笔算检验:
  - (1)  $5x-3=x+2$ ;
  - (2)  $0.5x-4=3x+2$ .
- 当自变量  $x$  的取值满足什么条件时, 函数  $y=\frac{3}{2}x+6$  的值满足下列条件?
  - (1)  $y=0$ ;
  - (2)  $y<0$ ;
  - (3)  $y>0$ ;
  - (4)  $y<2$ .
- 利用函数图象解不等式:
  - (1)  $5x-1>2x+5$ ;
  - (2)  $x-4<3x+1$ .
- 当自变量  $x$  取何值时, 函数  $y=\frac{5}{2}x+1$  与  $y=5x+17$  的值相等? 这个函数值是什么?

6. 利用函数图象解方程组:

$$(1) \begin{cases} 3x+2y=5, \\ 2x-y=1; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x+2y=4, \\ 2x-y=6. \end{cases}$$

综合运用

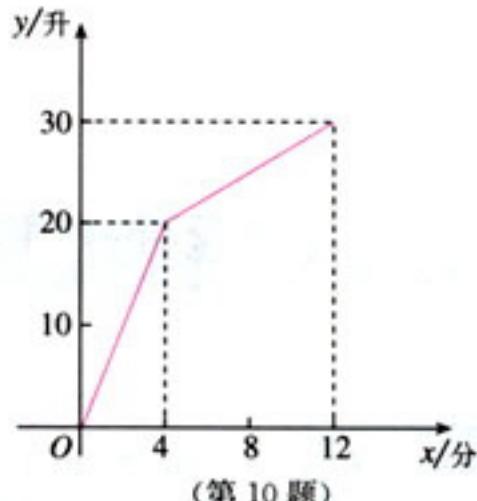
7. 一个静止的物体开始运动, 其速度每秒增加 0.5 米/秒, 多少秒后它的速度超过 6 米/秒? 多少秒之内它的速度不超过 8.5 米/秒?
8. 从 A 地向 B 地打长途电话, 通话 3 分以内收费 2.4 元, 3 分后每增加通话时间 1 分加收 1 元, 求通话费用  $y$ (单位: 元) 随通话时间  $x$ (单位: 分,  $x$  为正整数) 变化的函数关系式. 有 10 元钱时, 打一次电话最多可以打多长时间?
9. A、B 两个商场平时以同样价格出售相同的商品, 在春节期间让利酬宾, A 商场所有商品 8 折出售; 在 B 商场消费金额超过 200 元后, 可在这家商场 7 折购物. 试问如何选择商场来购物更经济?

拓广探索

10. 一个有进水管与出水管的容器, 单位时间内进出的水量都是一定的, 设从某时刻开始的 4 分内只进水不出水, 在随后的 8 分内既进水又出水, 容器内的水量  $y$ (单位: 升) 与时间  $x$ (单位: 分) 之间的关系如图所示.

- (1) 求  $0 \leq x \leq 4$  时  $y$  随  $x$  变化的函数关系式.
- (2) 求  $4 < x \leq 12$  时  $y$  随  $x$  变化的函数关系式.
- (3) 每分进水、出水各多少升?

11. 一次越野赛跑中, 当小明跑了 1600 米时, 小刚跑了 1450 米. 此后两人分别以  $a$  米/秒和  $b$  米/秒匀速跑, 又过 100 秒时小刚追上小明, 200 秒时小刚到达终点, 300 秒时小明到达终点. 这次越野赛跑的全程为多少?



(第 10 题)



## 数学活动

### 活动 1

- (1) 根据下表的数据在直角坐标系中画出人口增长曲线图；
- (2) 选择一个近似于人口增长曲线的一次函数，写出它的解析式；
- (3) 按照这样的增长趋势，试估计 2004 年我国的人口数.

中国人口数统计表

年 份	人 口 数 / 亿	年 份	人 口 数 / 亿
1964	7.04	1984	10.34
1969	8.06	1989	11.06
1974	9.08	1994	11.76
1979	9.79	1999	12.52

### 活动 2

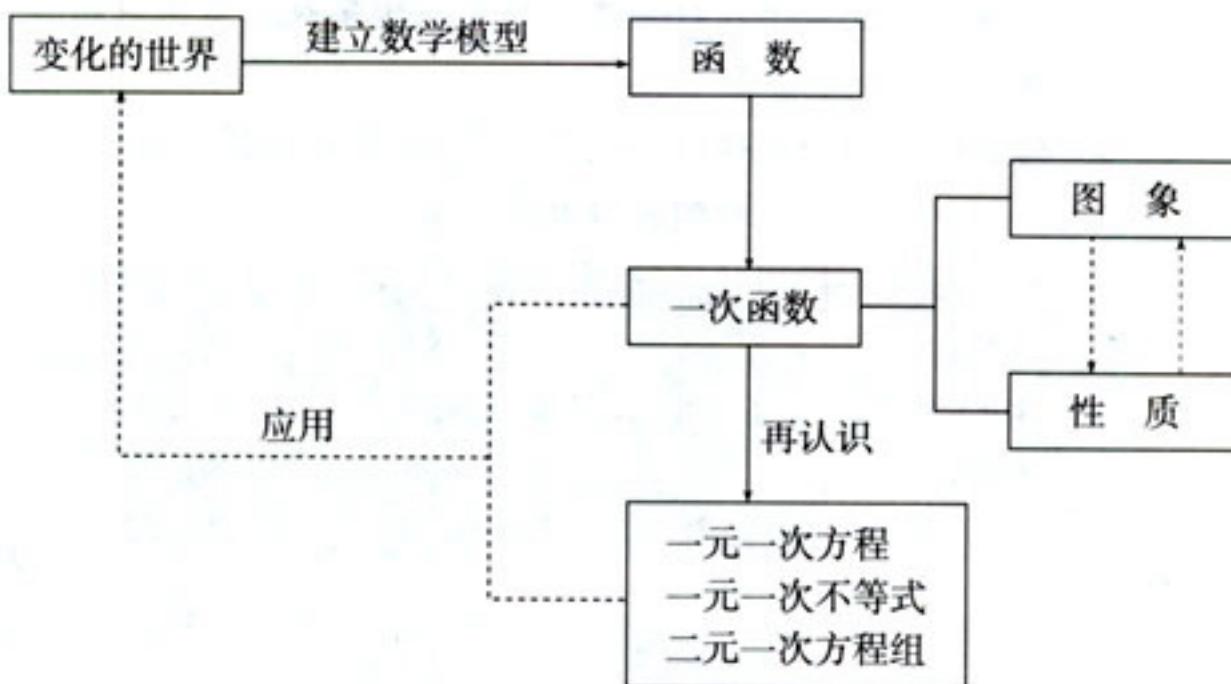
下表是“全球通”移动电话的几种不同收费方案.

方案代号	月租费/元	免费时间/分	超过免费时间的通话费元/分
0	50	0	0.40
1	30	48	0.60
2	98	170	0.60
3	168	330	0.50
4	268	600	0.45
5	388	1 000	0.40

- (1) 分别写出方案 0, 3, 5 中月话费 (月租费与通话费的总和)  $y$  (单位: 元) 与通话时间  $x$  (单位: 分) 的函数关系式;
- (2) 如果月通话时间为 300 分左右, 选择哪个方案最省钱?
- (3) 通过图象比较方案 0, 1, 2 和 3, 由此你对选择方案有什么建议?

# 小结

## 一、本章知识结构图



## 二、回顾与思考

1. 为了研究变化的世界，我们引入了函数。在同一变化的过程中两个相互制约、相互依存的量  $x$ ,  $y$  满足什么条件时， $y$  是  $x$  的函数？举出一些函数的实例。
2. 举例说明函数有哪几种表示法，它们各有什么优点？
3. 举例说明一次函数  $y=kx+b$  中的常数  $k$  对图象的影响，结合图象说明一次函数的性质。由一次函数的图象怎样求出它的解析式？
4. 一元一次方程、一元一次不等式、二元一次方程组与一次函数之间有什么关系？怎样用函数图象解方程（组）或解不等式？
5. 体会怎样建立实际问题的函数模型。

## 复习题11

### 复习巩固 ►►

1. 小亮为赞助“希望工程”现已存款 100 元，他计划今后三年每月存款 10 元，存款总数  $y$ （单位：元）将随时间  $x$ （单位：月）的变化而改变。指出其中的常量与变量，自变量与函数，试写出函数关系式。

2. 判断下列各点是否在直线  $y=2x+6$  上，这条直线与坐标轴交于何处？

$$(-5, -4), \quad (-7, 20), \\ \left(-\frac{7}{2}, 1\right), \quad \left(\frac{2}{3}, 7\frac{1}{3}\right).$$

3. 填空：

(1) 直线  $y=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}x$  经过第\_\_\_\_\_象限， $y$  随  $x$  的增大而\_\_\_\_\_；

(2) 直线  $y=3x-2$  经过第\_\_\_\_\_象限， $y$  随  $x$  的增大而\_\_\_\_\_。

4. 根据下列条件分别确定函数  $y=kx+b$  的解析式：

(1)  $y$  与  $x$  成正比例， $x=5$  时  $y=6$ ；

(2) 直线  $y=kx+b$  经过点  $(3, 6)$  与点  $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 。

5. 试根据函数  $y=3x-15$  的图象或性质，确定  $x$  取何值时：

(1)  $y>0$ ； (2)  $y<0$ .

### 综合运用 ►►

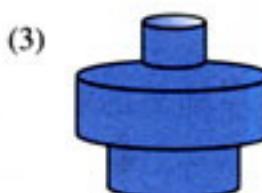
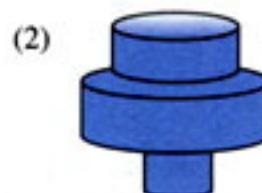
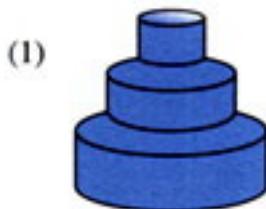
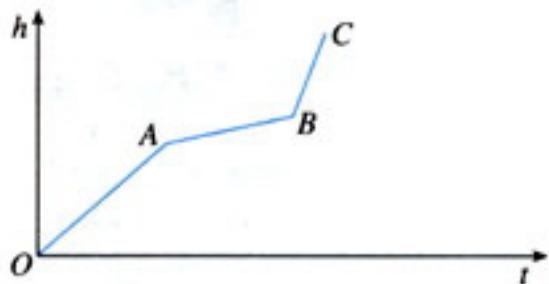
6. 在某火车站托运物品时，不超过 1 千克的物品需付 2 元，以后每增加 1 千克（不足 1 千克按 1 千克计）需增加托运费 5 角，设托运  $p$  千克 ( $p$  为整数) 物品的费用为  $c$  元，写出  $c$  的计算公式。



7. 某水果批发市场规定，批发苹果不少于100千克时，批发价为每千克2.5元。小王携带现金3000元到这市场采购苹果，并以批发价买进，如果购买的苹果为 $x$ 千克，小王付款后还剩余现金 $y$ 元，试写出 $y$ 与 $x$ 之间的函数关系式，并指出自变量 $x$ 的取值范围。

8. 均匀地向一个容器注水，最后把容器注满。在注水过程中，水面高度 $h$ 随时间 $t$ 的变化规律如图所示（图中OABC为一折线），这个容器的形状是图中哪一个？

你能画出向另两个容器注水时水面高度 $h$ 随时间 $t$ 变化的图象（草图）吗？



(第8题)

9. 已知等腰三角形周长为20 cm。

- 写出底边长 $y$  cm与腰长 $x$  cm之间的函数关系式( $x$ 为自变量)；
- 写出自变量取值范围；
- 在直角坐标系中，画出函数图象。

10. 已知 $A(8, 0)$ 及在第一象限的动点 $P(x, y)$ ，且 $x+y=10$ ，设 $\triangle OPA$ 的面积为 $S$ 。

- 求 $S$ 关于 $x$ 的函数表达式；
- 求 $x$ 的取值范围；
- 求 $S=12$ 时 $P$ 点坐标；
- 画出函数 $S$ 的图象。

拓广探索 ►►

11. 如图点  $A$ 、 $B$ 、 $C$  是三家工厂， $B$  厂和  $C$  厂的产量都为  $a$  吨， $A$  厂的产量为  $2a$  吨。现在为把三厂的产品集中起来要建一仓库。设仓库设在  $D$  点， $AD=x$  千米， $BD=y$  千米， $CD=z$  千米，每吨货物运行 1 千米所需费用为 10 元。试用  $x$ ， $y$ ， $z$  表示总运费  $W$ 。 $D$  点选在何处时总费用最小？

$A$

$B$

$C$

(第 11 题)

- (提示：联系几何知识考虑  $x+y$ ， $x+z$  的最小值，选择  $D$  点的位置。)
12. (1) 画出函数  $y=|x-1|$  的图象；  
(2) 设  $P(x, 0)$  是数轴上的一个动点，它与数轴上表示  $-3$  的点的距离为  $y$ ，求  $x$  的函数  $y$  的解析式，画出这个函数的图象。