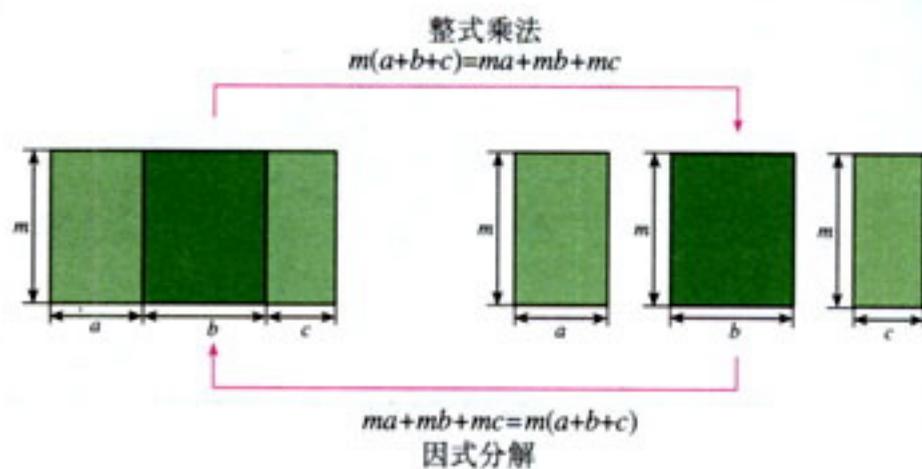


第十五章 整式



15

- 15.1 整式的加减
- 15.2 整式的乘法
- 15.3 乘法公式
- 15.4 整式的除法
- 15.5 因式分解

为了扩大绿地面积，要把街心花园的一块长 m 米，宽 b 米的长方形绿地，向两边分别加宽 a 米和 c 米（如左图），你能用几种方法表示扩大后绿地的面积？不同的表示方法之间有什么关系？如何从数学的角度认识它们之间的关系？

回答上面的问题要用到本章将要学习的整式的运算和因式分解的知识。

整式与数一样，也有加、减、乘、除等运算，整式的运算是解方程、解不等式的重要基础。本章我们将学习整式的运算等内容，它们会给我们研究数量及其关系带来很大的方便。



15.1 整式的加减

15.1.1 整式

思考

先填空，再看看列出的式子有什么特点.

(1) 边长为 x 的正方形的周长为_____;

(2) 一辆汽车的速度是 v 千米/时，行驶 t 小时所走过的路程为_____千米;

(3) 如图 15.1-1，正方体的表面积为_____，正方体的体积为_____;

(4) 设 n 表示一个数，则它的相反数是_____.

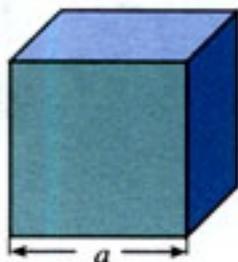


图 15.1-1

$$\begin{aligned}4x &= 4 \cdot x, \\ vt &= v \cdot t, \\ 6a^2 &= 6 \cdot a \cdot a, \\ a^3 &= a \cdot a \cdot a, \\ -n &= -1 \cdot n.\end{aligned}$$

上面问题中，所列的式子是 $4x$ ， vt ， $6a^2$ ， a^3 ， $-n$ ，它们都是数或字母的积，这样的式子叫做**单项式** (monomial)。单独的一个数或一个字母也是单项式。

$6a^2$ ， a^3 ， $-n$
的系数分别是多少？

$6a^2$ ， a^3 ， $-n$
的次数分别是多少？

单项式中的数字因数叫做这个单项式的**系数** (coefficient)。例如，单项式 $4x$ ， vt 的系数分别是 4，1。

一个单项式中，所有字母的指数的和叫做这个单项式的**次数** (degree)。例如，在单项式 $4x$ 中，字母 x 的指数是 1， $4x$ 是一次单项式。在单项式 vt 中，字母 v 与 t 的指数的和是 2， vt 是二次单项式。

思考

先填空，再看看列出的式子有什么特点.

- (1) 温度由 $t^{\circ}\text{C}$ 下降 5°C 后是 $\underline{\hspace{2cm}}$ $^{\circ}\text{C}$;
- (2) 买一个篮球需要 x 元，买一个排球需要 y 元，买一个足球需要 z 元，买 3 个篮球、5 个排球、2 个足球共需要 $\underline{\hspace{2cm}}$ 元;
- (3) 如图 15.1-2，三角尺的面积为 (π 取 3.14) $\underline{\hspace{2cm}}$;

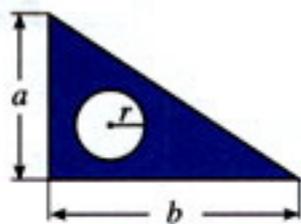


图 15.1-2

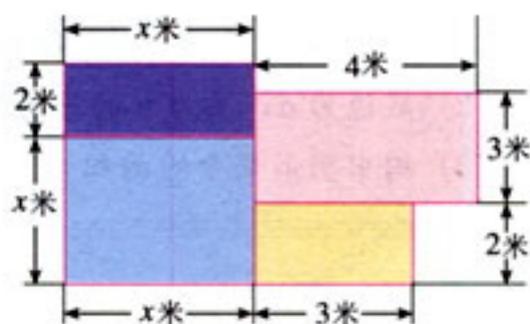


图 15.1-3

- (4) 图 15.1-3 是一所住宅的建筑平面图，这所住宅的建筑面积是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 米².

$3x + 5y + 2z$,
 $\frac{1}{2}ab - 3.14r^2$,
 $x^2 + 2x + 18$ 的项
分别是什么?

$3x + 5y + 2z$,
 $\frac{1}{2}ab - 3.14r^2$ 的次
数分别是几?

上面列出的式子 $t - 5$, $3x + 5y + 2z$, $\frac{1}{2}ab - 3.14r^2$, $x^2 + 2x + 18$, 都可以看成由单项式的和组成的式子.

几个单项式的和叫做**多项式** (polynomial). 在多项式中，每个单项式叫做多项式的**项** (term)，其中，不含字母的项叫做**常数项** (constant term). 例如 $t - 5$ 是 t 与 -5 的和. t 与 -5 都是它的项， -5 是常数项.

在上面的多项式中， $t - 5$, $x^2 + 2x + 14$ 里次数最高项的次数分别是 1, 2, 它们分别是一次多项式，二次多项式. 一般地，多项式里次数最高的项的次数，就是这个多项式的**次数**.

单项式与多项式统称**整式** (integral expression).

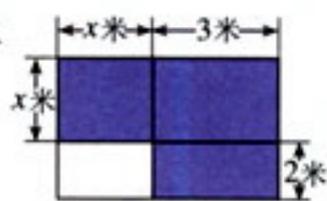
练习

1. 填表:

单项式	$2a^2$	$-1.2h$	xy^2	$-t^2$	$-\frac{2vt}{3}$
系数					
次数					

2. 用整式填空, 指出单项式的次数以及多项式的次数和项:

- (1) 每包书有 12 册, n 包书有 () 册;
- (2) 底边为 a , 高为 h 的三角形的面积为 ();
- (3) 图中阴影部分的面积为 ().



(第 2(3) 题)

15.1.2 整式的加减

在前面第二章, 我们解决过这样的问题: 某校前年、去年、今年购买的计算机台数分别是 x , $2x$, $4x$, 那么这个学校这三年购买的计算机台数是 $7x$, 即

$$x + 2x + 4x = 7x.$$

说说这个结果是怎样得到的.

探究

- (1) $3x^2 + 2x^2 = ()x^2$;
- (2) $3ab^2 - 4ab^2 = ()ab^2$;
- (3) $4x^2 + 2x + 7 + 3x - 8x^2 - 2 = ()x^2 + ()x + ()$.

观察(1)中多项式的项 $3x^2$ 与 $2x^2$, 它们含相同的字母 x , 并且 x 的指数都是 2. (2)中多项式的项是 $3ab^2$ 与 $-4ab^2$, 它们都含字母 a 、 b , 并且 a 都是一次,

b 都是二次, 像 $3x^2$ 与 $2x^2$ (或 $3ab^2$ 与 $-4ab^2$) 这种所含字母相同, 并且相同字母的指数也相同的项叫做**同类项**. 几个常数项也是同类项.

通常我们把一个多项式的各项按照某个字母的指数从大到小(降幂)或者从小到大(升幂)的顺序排列, 如 $-4x^2+5x+5$ 也可以写成 $5+5x-4x^2$.

在多项式中遇到同类项, 可以运用交换律、结合律、分配律进行合并. 例如, 对于上面探究中的(3), 我们可以将同类项合并:

$$\begin{aligned} & 4x^2+2x+7+3x-8x^2-2 \\ &= (4x^2-8x^2)+(2x+3x)+(7-2) \\ &= (4-8)x^2+(2+3)x+(7-2) \\ &= -4x^2+5x+5. \end{aligned}$$

把多项式中的同类项合并成一项, 即把它们的系数相加作为新的系数, 而字母部分不变, 叫做**合并同类项**.

例 1 做大小两个长方体纸盒, 尺寸如下(单位: cm):

	长	宽	高
小纸盒	a	b	c
大纸盒	$1.5a$	$2b$	$2c$

- 做这两个纸盒共用料多少平方厘米?
- 做大纸盒比做小纸盒多用料多少平方厘米?

解: 小纸盒的表面积是 $(2ab+2bc+2ca)\text{cm}^2$,
大纸盒的表面积是 $(6ab+8bc+6ca)\text{cm}^2$.

- 做这两个纸盒共用料(单位: cm^2)

$$\begin{aligned} & (2ab+2bc+2ca)+(6ab+8bc+6ca) \\ &= 2ab+2bc+2ca+6ab+8bc+6ca \\ &= 8ab+10bc+8ca. \end{aligned}$$

- 做大纸盒比做小纸盒多用料(单位: cm^2)

$$\begin{aligned} & (6ab+8bc+6ca)-(2ab+2bc+2ca) \\ &= 6ab+8bc+6ca-2ab-2bc-2ca \end{aligned}$$

我们在第二章学过, 如果括号前面是负号, 去括号时, 把括号与它前面的负号一起去掉, 括号内各项要变号.

$$=4ab+6bc+4ac.$$

几个整式相加减，通常用括号把每一个整式括起来，再用加减号连接；然后去括号，合并同类项。

例 2 求 $\frac{1}{2}x - 2(x - \frac{1}{3}y^2) + (-\frac{3}{2}x + \frac{1}{3}y^2)$ 的值，

其中 $x = -2$, $y = \frac{2}{3}$.

请将 x 与 y 的值直接代入式子进行计算，并与例 2 的解法比较，你认为哪种解法更简便？

$$\begin{aligned} \text{解: } & \frac{1}{2}x - 2(x - \frac{1}{3}y^2) + (-\frac{3}{2}x + \frac{1}{3}y^2) \\ &= \frac{1}{2}x - 2x + \frac{2}{3}y^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{3}y^2 \\ &= -3x + y^2. \end{aligned}$$

当 $x = -2$, $y = \frac{2}{3}$ 时，

$$\text{原式} = (-3) \times (-2) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 6 + \frac{4}{9} = 6\frac{4}{9}.$$

练习

1. 计算：

$$(1) 3xy - 4xy - (-2xy); \quad (2) -\frac{1}{3}ab - \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{3}a^2 - \left(-\frac{2}{3}ab\right).$$

2. 计算：

$$(1) (-x + 2x^2 + 5) + (4x^2 - 3 - 6x); \quad (2) (3a^2 - ab + 7) - (-4a^2 + 2ab + 7).$$

3. 求值：

$$5(3a^2b - ab^2) - (ab^2 + 3a^2b), \text{ 其中 } a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}.$$

习题15.1

复习巩固

1. 填表:

整式	$-15ab$	$4a^2b^2$	$\frac{3x^2y}{5}$	$4x^2-3$	$a^4-2a^2b^2+b^4$
系数					
次数					

2. 下列各题计算的结果对不对? 如果不对, 指出错在哪里.

(1) $3a+2b=5ab$;

(2) $5y^2-2y^2=3$;

(3) $2ab-2ba=0$;

(4) $3x^2y-5xy^2=-2x^2y$.

3. 计算:

(1) $(5a+4c+7b)+(5c-3b-6a)$;

(2) $(8xy-x^2+y^2)-(x^2-y^2+8xy)$;

(3) $(2x^2-\frac{1}{2}+3x)-4(x-x^2+\frac{1}{2})$;

(4) $3x^2-[7x-(4x-3)-2x^2]$.

4. 求值:

$(-x^2+5+4x)+(5x-4+2x^2)$, 其中 $x=-2$.

综合运用

5. 一个四边形的周长是 48 cm, 且第一条边长 a cm, 第二条边比第一条边的 2 倍长 3 cm, 第三条边长等于第一、二两条边长的和.

(1) 写出表示第四条边长的式子;

(2) 当 $a=3$ cm 或 $a=7$ cm 时, 还能得到四边形吗? 这时的图形是什么形状?

6. 一个两位数, 其中 a 表示十位上的数字, b 表示个位上的数字, 把这个两位数的两个数位上的数字交换位置, 得到一个新的两位数, 计算所得的数与原数的和. 这个和能被 11 整除吗?

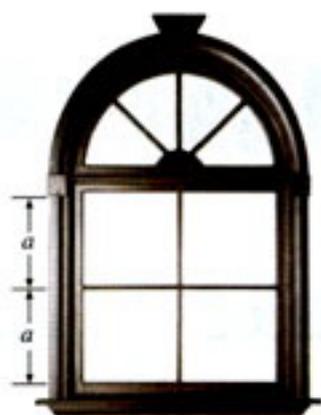
7. 三个植树队, 第一队植树 x 棵, 第二队植的树比第一队植树的 2 倍少 25 棵, 第三队植的树比第一队植树的一半多 42 棵. 求当 x 为下列各值时, 三个队共植树

多少棵.

- (1) $x=100$; (2) $x=240$.

8. 窗户的形状如图, 其上部是半圆形, 下部是边长相同的四个小正方形. 已知下部小正方形的边长为 a cm, 计算:

- (1) 窗户的面积; (2) 窗户的外框的总长.

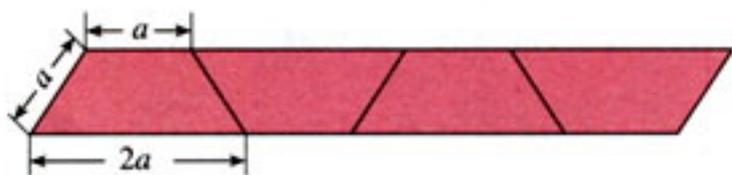


(第 8 题)

拓广探索

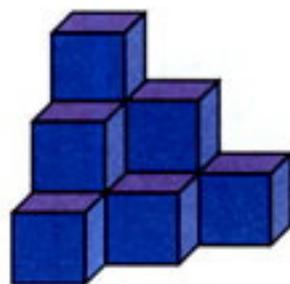
9. 观察下图并填表:

梯形个数	1	2	3	4	5	6	...	n
图形周长	$5a$	$8a$	$11a$	$14a$				



(第 9 题)

10. 10 个棱长为 a 的正方体摆放成如图的形状, 这个图形的表面积是多少?



(第 10 题)

15.2 整式的乘法

15.2.1 同底数幂的乘法



问题 一种电子计算机每秒可进行 10^{12} 次运算，它工作 10^3 秒可进行多少次运算？

它工作 10^3 秒可进行运算的次数为 $10^{12} \times 10^3$ 。怎样计算 $10^{12} \times 10^3$ 呢？

根据乘方的意义可知

$$\begin{aligned}10^{12} \times 10^3 &= \underbrace{(10 \times \cdots \times 10)}_{12 \text{ 个 } 10} \times (10 \times 10 \times 10) \\ &= \underbrace{(10 \times 10 \times \cdots \times 10)}_{15 \text{ 个 } 10} \\ &= 10^{15}.\end{aligned}$$

探究

根据乘方的意义填空，看看计算结果有什么规律：

(1) $2^5 \times 2^2 = 2^{(\quad)}$;

(2) $a^3 \cdot a^2 = a^{(\quad)}$;

(3) $5^m \cdot 5^n = 5^{(\quad)}$.

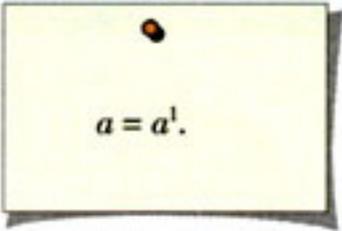
对于任意底数 a 与任意正整数 m, n ,

$$\begin{aligned}a^m \cdot a^n &= \underbrace{(aa \cdots a)}_{m \text{ 个 } a} \underbrace{(aa \cdots a)}_{n \text{ 个 } a} \\ &= \underbrace{aa \cdots a}_{(m+n) \text{ 个 } a} = a^{m+n}.\end{aligned}$$

一般地，我们有

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (m, n \text{ 都是正整数}).$$

即同底数幂相乘，底数不变，指数相加。



$$a = a^1.$$

例 1 计算:

(1) $x^2 \cdot x^5$;

(2) $a \cdot a^6$;

(3) $2 \times 2^4 \times 2^3$;

(4) $x^m \cdot x^{3m+1}$.

解: (1) $x^2 \cdot x^5 = x^{2+5} = x^7$.

(2) $a \cdot a^6 = a^{1+6} = a^7$.

(3) $2 \times 2^4 \times 2^3 = 2^{1+4+3} = 2^8$.

(4) $x^m \cdot x^{3m+1} = x^{m+3m+1} = x^{4m+1}$.

练习

计算:

(1) $b^5 \cdot b$; (2) $10 \times 10^2 \times 10^3$;

(3) $-a^2 \cdot a^6$; (4) $y^{2n} \cdot y^{n+1}$.

15.2.2 幂的乘方

探究

根据乘方的意义及同底数幂的乘法填空,看看计算的结果有什么规律:

(1) $(3^2)^3 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 = 3^{(\quad)}$;

(2) $(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{(\quad)}$.

(3) $(a^m)^3 = a^m \cdot a^m \cdot a^m = a^{(\quad)}$ (m 是正整数).

对于任意底数 a 与任意正整数 m, n ,

$$(a^m)^n = \overbrace{a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}^{n \uparrow a^m} = a^{\overbrace{m+m+\dots+m}^{n \uparrow m}} = a^{mn}.$$

一般地,我们有

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (m, n \text{ 都是正整数}).$$

即幂的乘方，底数不变，指数相乘.

例 2 计算：

$$(1) (10^3)^5; \quad (2) (a^4)^4;$$

$$(3) (a^m)^2; \quad (4) -(x^4)^3.$$

解：(1) $(10^3)^5 = 10^{3 \times 5} = 10^{15}$.

$$(2) (a^4)^4 = a^{4 \times 4} = a^{16}.$$

$$(3) (a^m)^2 = a^{m \times 2} = a^{2m}.$$

$$(4) -(x^4)^3 = -x^{4 \times 3} = -x^{12}.$$

练习

计算：

$$(1) (10^3)^3; \quad (2) (x^3)^2;$$

$$(3) -(x^m)^5; \quad (4) (a^2)^3 \cdot a^5.$$

15.2.3 积的乘方

探究

填空，看看运算过程用到哪些运算律？运算结果有什么规律？

$$(1) (ab)^2 = (ab) \cdot (ab) = (a \cdot a) \cdot (b \cdot b) = a^{(\quad)} b^{(\quad)};$$

$$(2) (ab)^3 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = a^{(\quad)} b^{(\quad)}.$$

对于任意底数 a , b 与任意正整数 n ,

$$\begin{aligned}(ab)^n &= \overbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot \cdots \cdot (ab)}^{n \uparrow ab} \\ &= \overbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}^{n \uparrow a} \cdot \overbrace{b \cdot b \cdot \cdots \cdot b}^{n \uparrow b} = a^n b^n.\end{aligned}$$

一般地, 我们有

$$(ab)^n = a^n b^n \quad (n \text{ 为正整数}).$$

即积的乘方, 等于把积的每一个因式分别乘方, 再把所得的幂相乘.

例 3 计算:

- (1) $(2a)^3$; (2) $(-5b)^3$;
(3) $(xy^2)^2$; (4) $(-2x^3)^4$.

解: (1) $(2a)^3 = 2^3 \cdot a^3 = 8a^3$.

(2) $(-5b)^3 = (-5)^3 \cdot b^3 = -125b^3$.

(3) $(xy^2)^2 = x^2 \cdot (y^2)^2 = x^2 y^4$.

(4) $(-2x^3)^4 = (-2)^4 \cdot (x^3)^4 = 16x^{12}$.

练习

计算:

- (1) $(ab)^4$; (2) $(-2xy)^3$;
(3) $(-3 \times 10^2)^3$; (4) $(2ab^2)^3$.

15.2.4 整式的乘法



问题 光的速度约为 3×10^5 千米/秒, 太阳光照射到地球上需要的时间大约是 5×10^2 秒, 你知道地球与太阳的距离约是多少千米吗?

地球与太阳的距离约是 $(3 \times 10^5) \times (5 \times 10^2)$ 千米.



地球与太阳的距
离约是
 $15 \times 10^7 = 1.5 \times 10^8$
(千米).

(1) 怎样计算 $(3 \times 10^5) \times (5 \times 10^2)$? 计算过程中用到哪些运算律及运算性质?

(2) 如果将上式中的数字改为字母, 比如 $ac^5 \cdot bc^2$, 怎样计算这个式子?

$ac^5 \cdot bc^2$ 是两个单项式 ac^5 与 bc^2 相乘, 我们可以利用乘法交换律、结合律及同底数幂的运算性质来计算:

$$ac^5 \cdot bc^2 = (a \cdot b) \cdot (c^5 \cdot c^2) = abc^{5+2} = abc^7.$$

单项式与单项式相乘, 把它们的系数、相同字母分别相乘, 对于只在一个单项式里含有的字母, 则连同它的指数作为积的一个因式.

例 4 计算:

(1) $(-5a^2b)(-3a)$; (2) $(2x)^3(-5xy^2)$.

解: (1) $(-5a^2b)(-3a)$
 $= [(-5) \times (-3)](a^2 \cdot a)b = 15a^3b.$

(2) $(2x)^3(-5xy^2)$
 $= 8x^3(-5xy^2) = [8 \times (-5)](x^3 \cdot x)y^2$
 $= -40x^4y^2.$

练习

1. 计算:

$(1) 3x^2 \cdot 5x^3;$

$(2) 4y \cdot (-2xy^2);$

$(3) (3x^2y)^3 \cdot (-4x);$

$(4) (-2a)^3 \cdot (-3a)^2.$

2. 下面计算的对不对? 如果不对, 应当怎样改正?

$(1) 3a^3 \cdot 2a^2 = 6a^6;$

$(2) 2x^2 \cdot 3x^2 = 6x^4;$

$(3) 3x^2 \cdot 4x^2 = 12x^2;$

$(4) 5y^3 \cdot 3y^5 = 15y^{15}.$



问题 三家连锁店以相同的价格 m (单位: 元/瓶) 销售某种商品, 它们在一个月内的销售量 (单位: 瓶) 分别是 a, b, c . 你能用不同的方法计算它们在这个月内销售这种商品的总收入吗?

一种方法是先求三家连锁店的总销量, 再求总收入, 即总收入 (单位: 元) 为:

$$m(a+b+c). \quad \textcircled{1}$$

另一种方法是先分别求三家连锁店的收入, 再求它们的和, 即总收入 (单位: 元) 为:

$$ma+mb+mc. \quad \textcircled{2}$$

由于①、②表示同一个量, 所以

$$m(a+b+c)=ma+mb+mc.$$

上面的等式提供了单项式与多项式相乘的方法.

你能根据分配律得到这个等式吗?

单项式与多项式相乘, 就是用单项式去乘多项式的每一项, 再把所得的积相加.

例 5 计算:

$(1) (-4x^2) \cdot (3x+1);$

把单项式与多项式相乘的问题转化为单项式与单项式相乘的问题.

$$(2) \left(\frac{2}{3}ab^2 - 2ab\right) \cdot \frac{1}{2}ab.$$

解: (1) $(-4x^2) \cdot (3x+1)$
 $= (-4x^2) \cdot (3x) + (-4x^2) \cdot 1$
 $= (-4 \times 3)(x^2 \cdot x) + (-4x^2)$
 $= -12x^3 - 4x^2.$

(2) $\left(\frac{2}{3}ab^2 - 2ab\right) \cdot \frac{1}{2}ab$
 $= \frac{2}{3}ab^2 \cdot \frac{1}{2}ab + (-2ab) \cdot \frac{1}{2}ab$
 $= \frac{1}{3}a^2b^3 - a^2b^2.$

现在你能解决本章引言中绿地面积的问题了吗?

练习

1. 计算:

(1) $3a(5a-2b)$; (2) $(x-3y) \cdot (-6x).$

2. 化简 $x(x-1)+2x(x+1)-3x(2x-5).$

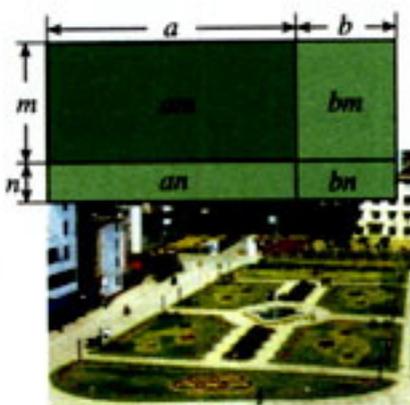


图 15.2-1

问题 如图 15.2-1, 为了扩大街心花园的绿地面积, 把一块原长 a 米、宽 m 米的长方形绿地, 增长了 b 米, 加宽了 n 米. 你能用几种方法求出扩大后的绿地的面积?

扩大后的绿地可以看成长为 $(a+b)$ 米, 宽为 $(m+n)$ 米的长方形, 所以这块绿地的面积为

$$(a+b)(m+n) \text{米}^2.$$

扩大后的绿地还可以看成由四个小长方形组成, 所以这块绿地的面积为

$$(am+an+bm+bn) \text{米}^2.$$

因此 $(a+b)(m+n) = am+an+bm+bn.$

上面的等式提供了多项式与多项式相乘的方法.

●
把多项式相乘的问题转化为单项式与多项式相乘的问题.

计算 $(a+b)(m+n)$, 可以先把其中的一个多项式, 如 $m+n$, 看成一个整体, 运用单项式与多项式相乘的法则, 得

$$(a+b)(m+n) = a(m+n) + b(m+n),$$

再利用单项式与多项式相乘的法则, 得

$$a(m+n) + b(m+n) = am + an + bm + bn.$$

总体上看, $(a+b)(m+n)$ 的结果可以看作由 $a+b$ 的每一项乘 $m+n$ 的每一项, 再把所得的积相加而得到的, 即

$$(a+b)(m+n) = am + an + bm + bn.$$

多项式与多项式相乘, 先用一个多项式的每一项乘另一个多项式的每一项, 再把所得的积相加.

例 6 计算:

$$(1) (3x+1)(x-2); \quad (2) (x-8y)(x-y).$$

$$\text{解: (1) } (3x+1)(x-2)$$

$$= (3x) \cdot x + (3x) \cdot (-2) +$$

$$1 \cdot x + 1 \times (-2)$$

$$= 3x^2 - 6x + x - 2$$

$$= 3x^2 - 5x - 2.$$

$$(2) (x-8y)(x-y)$$

$$= x^2 - xy - 8xy + 8y^2$$

$$= x^2 - 9xy + 8y^2.$$

练习

1. 计算:

$(1) (2x+1)(x+3); \quad (2) (m+2n)(m-3n);$

$(3) (a-1)^2; \quad (4) (a+3b)(a-3b).$

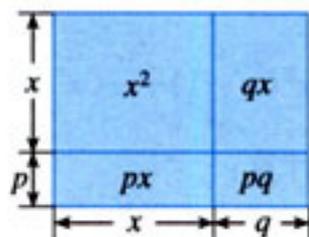
2. 计算:

$(1) (x+2)(x+3); \quad (2) (x-4)(x+1);$

$(3) (y+4)(y-2); \quad (4) (y-5)(y-3).$

3. 由上面第2题的结果找规律, 观察右图, 填空:

$(x+p)(x+q) = (\quad)^2 + (\quad)x + (\quad).$



(第3题)

习题15.2

复习巩固

1. 下面的计算对不对? 如果不对, 应当怎样改正.

$(1) b^3 \cdot b^3 = 2b^3; \quad (2) x^4 \cdot x^4 = x^{16}; \quad (3) (a^5)^2 = a^7;$

$(4) (a^3)^2 \cdot a^4 = a^9; \quad (5) (ab^2)^3 = ab^6; \quad (6) (-2a)^2 = -4a^2.$

2. 计算:

$(1) x \cdot x^3 + x^2 \cdot x^2; \quad (2) (-pq)^3;$

$(3) -(-2a^2b)^4; \quad (4) a^3 \cdot a^4 \cdot a + (a^2)^4 + (-2a^4)^2.$

3. 计算:

$(1) 6x^2 \cdot 3xy; \quad (2) 2ab^2 \cdot (-3ab);$

$(3) 4x^2y \cdot (-xy^2)^3; \quad (4) (1.3 \times 10^5)(3.8 \times 10^3).$

4. 计算:

$(1) (4a-b^2) \cdot (-2b); \quad (2) 2x^2 \left(x - \frac{1}{2}\right);$

$(3) 5ab \cdot (2a-b+0.2); \quad (4) \left(2a^2 - \frac{2}{3}a - \frac{4}{9}\right) \cdot (-9a).$

5. 计算:

$(1) (x-6) \cdot (x-3); \quad (2) \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{1}{3}\right);$

$$(3) (3x+2)(x+2);$$

$$(4) (4y-1) \cdot (y-5).$$

综合运用

6. 求值:

$$x^2(x-1) - x(x^2+x-1), \text{ 其中 } x = \frac{1}{2}.$$

7. 计算:

$$(1) (x-3)(x-3) - 6(x^2+x-1);$$

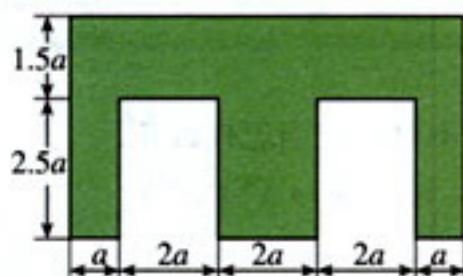
$$(2) (2x+1)^2 - (x+3)^2 - (x-1)^2 + 1.$$

8. 信息技术的存储设备常用 B、K、M、G 等作为存储量的单位. 例如, 我们常说某计算机的硬盘容量是 40 G, 某移动存储器的容量是 64 M, 某个文件大小是 156 K 等, 其中 $1 \text{ G} = 2^{10} \text{ M}$, $1 \text{ M} = 2^{10} \text{ K}$, $1 \text{ K} = 2^{10} \text{ B}$ (字节). 对于一个 1.44 M 的 3.5 寸软盘, 其容量有多少个字节?



9. 卫星绕地球运动的速度 (即第一宇宙速度) 是 7.9×10^3 米/秒, 求卫星绕地球运行 2×10^2 秒走过的路程.

10. 计算图中阴影所示绿地面积 (长度单位: m).



(第 10 题)

拓广探索

11. 解方程与不等式:

$$(1) (x-3)(x-2) + 18 = (x+9)(x+1);$$

$$(2) (3x+4)(3x-4) < 9(x-2)(x+3).$$

12. 确定下列各式中 m 的值:

$$(1) (x+4)(x+9) = x^2 + mx + 36;$$

$$(2) (x-2)(x-18) = x^2 + mx + 36;$$

$$(3) (x+3)(x+p) = x^2 + mx + 36;$$

$$(4) (x-6)(x-p) = x^2 + mx + 36;$$

$$(5) (x+p)(x+q) = x^2 + mx + 36, \text{ } p, q \text{ 为正整数.}$$

15.3 乘法公式

某些特殊形式的多项式相乘，可以写成公式的形式，当遇到相同形式的多项式相乘时，就可以直接运用公式写出结果。

15.3.1 平方差公式



计算下列多项式的积，你能发现什么规律？

(1) $(x+1)(x-1)=$ _____；

(2) $(m+2)(m-2)=$ _____；

(3) $(2x+1)(2x-1)=$ _____.

我们再来计算 $(a+b)(a-b)$ ，有

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a^2 - ab + ab - b^2 \\ &= a^2 - b^2.\end{aligned}$$

一般地，我们有

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

即两个数的和与这两个数的差的积，等于这两个数的平方差。

这个公式叫做（乘法的）平方差公式（formula for the difference of squares）。



你能根据图 15.3-1 中的面积说明平方差公式吗?

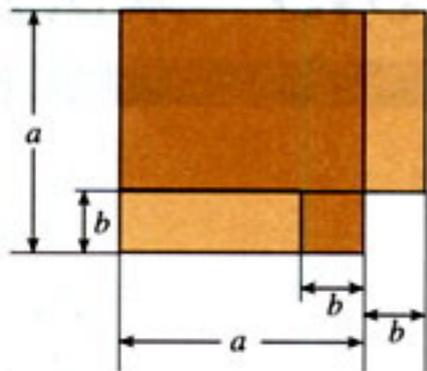


图 15.3-1

例 1 运用平方差公式计算:

- (1) $(3x+2)(3x-2)$;
- (2) $(b+2a)(2a-b)$;
- (3) $(-x+2y)(-x-2y)$.

分析: 在(1)中, 可以把 $3x$ 看成 a , 2 看成 b , 即

$$\begin{array}{cccccc} (3x+2)(3x-2) & = & (3x)^2 & - & 2^2 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ (a+b)(a-b) & = & a^2 & - & b^2 \end{array}$$

解: (1) $(3x+2)(3x-2)$
 $= (3x)^2 - 2^2$
 $= 9x^2 - 4.$

(2) $(b+2a)(2a-b)$
 $= (2a+b)(2a-b)$
 $= (2a)^2 - b^2 = 4a^2 - b^2.$

(3) $(-x+2y)(-x-2y)$
 $= (-x)^2 - (2y)^2$
 $= x^2 - 4y^2.$

你还有其他的计算方法吗?

例 2 计算:

- (1) 102×98 ;
- (2) $(y+2)(y-2) - (y-1)(y+5)$.

只有符合公式要求的乘法，才能运用公式简化运算，其余的运算仍按乘法法则进行。

解：(1) $102 \times 98 = (100+2)(100-2)$
 $= 100^2 - 2^2 = 10\,000 - 4 = 9\,996.$

(2) $(y+2)(y-2) - (y-1)(y+5)$
 $= y^2 - 2^2 - (y^2 + 4y - 5)$
 $= y^2 - 4 - y^2 - 4y + 5$
 $= -4y + 1.$

练习

1. 下面各式的计算对不对？如果不对，应当怎样改正？

(1) $(x+2)(x-2) = x^2 - 2$; (2) $(-3a-2)(3a-2) = 9a^2 - 4.$

2. 运用平方差公式计算：

(1) $(a+3b)(a-3b)$;

(2) $(3+2a)(-3+2a)$;

(3) 51×49 ;

(4) $(3x+4)(3x-4) - (2x+3)(3x-2).$

15.3.2 完全平方公式



计算下列各式，你能发现什么规律？

(1) $(p+1)^2 = (p+1)(p+1) = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) $(m+2)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$;

(3) $(p-1)^2 = (p-1)(p-1) = \underline{\hspace{2cm}}$;

(4) $(m-2)^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$

我们再来计算 $(a+b)^2$, $(a-b)^2$.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 \\ = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 \\ = a^2 - 2ab + b^2.$$

一般地，我们有

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

即两数和（或差）的平方，等于它们的平方和，加（或减）它们的积的2倍。

这两个公式叫做（乘法的）完全平方公式（formula for the square of the sum）。



你能根据图 15.3-2 和图 15.3-3 中的面积说明完全平方公式吗？

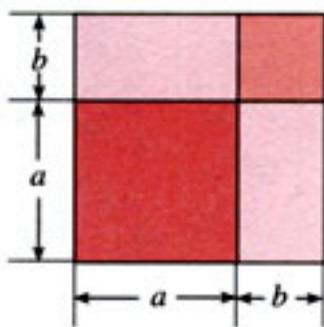


图 15.3-2

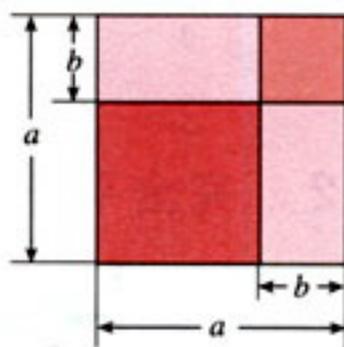


图 15.3-3

例 3 运用完全平方公式计算：

(1) $(4m+n)^2$; (2) $(y-\frac{1}{2})^2$.

解：(1) $(4m+n)^2 = (4m)^2 + 2 \cdot (4m) \cdot n + n^2$
 $= 16m^2 + 8mn + n^2$;

(2) $(y-\frac{1}{2})^2 = y^2 - 2 \cdot y \cdot \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2$
 $= y^2 - y + \frac{1}{4}$.

例 4 运用完全平方公式计算：

(1) 102^2 ; (2) 99^2 .

解：(1) $102^2 = (100+2)^2 = 100^2 + 2 \times 100 \times 2 + 2^2$
 $= 10\ 000 + 400 + 4 = 10\ 404.$

(2) $99^2 = (100-1)^2 = 100^2 - 2 \times 100 \times 1 + 1^2$
 $= 10\ 000 - 200 + 1 = 9\ 801.$



$(a+b)^2$ 与 $(-a-b)^2$ 相等吗？ $(a-b)^2$ 与 $(b-a)^2$ 相等吗？ $(a-b)^2$ 与 a^2-b^2 相等吗？为什么？

练习

1. 运用完全平方公式计算：

(1) $(x+6)^2$; (2) $(y-5)^2$;

(3) $(-2x+5)^2$; (4) $\left(\frac{3}{4}x - \frac{2}{3}y\right)^2$.

2. 下面各式的计算错在哪里？应当怎样改正？

(1) $(a+b)^2 = a^2 + b^2$; (2) $(a-b)^2 = a^2 - b^2$.

运用乘法公式计算，有时要在式子中添括号。在第二章中，我们已学过去括号法则，即

$$a+(b+c)=a+b+c; \quad a-(b+c)=a-b-c.$$

反过来，就得到添括号法则：

$$a+b+c=a+(b+c); \quad a-b-c=a-(b+c).$$

添括号时，如果括号前面是正号，括到括号里的各项都不变符号；如果括号前面是负号，括到括号里的各项都改变符号。

有些整式相乘需要先作适当变形, 然后再用公式.

例 5 运用乘法公式计算:

(1) $(x+2y-3)(x-2y+3)$; (2) $(a+b+c)^2$.

解: (1) $(x+2y-3)(x-2y+3)$
 $= [x+(2y-3)][x-(2y-3)]$
 $= x^2 - (2y-3)^2$
 $= x^2 - (4y^2 - 12y + 9)$
 $= x^2 - 4y^2 + 12y - 9.$

(2) $(a+b+c)^2$
 $= [(a+b)+c]^2$
 $= (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2$
 $= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$
 $= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$

能否用去括号法则检查添括号是否正确?

练习

1. 在等号右边的括号内填上适当的项:

(1) $a+b-c=a+(\quad)$; (2) $a-b+c=a-(\quad)$;
 (3) $a-b-c=a-(\quad)$; (4) $a+b+c=a-(\quad)$.

2. 运用乘法公式计算:

(1) $(a+2b-1)^2$; (2) $(2x+y+z)(2x-y-z)$.

习题 15.3

复习巩固

1. 运用平方差公式计算:

(1) $(\frac{2}{3}x-y)(\frac{2}{3}x+y)$; (2) $(xy+1)(xy-1)$;

(3) $(2a-3b)(3b+2a)$;

(4) $(-2b-5) \cdot (2b-5)$;

(5) $2\,001 \times 1\,999$;

(6) $998 \times 1\,002$.

2. 运用完全平方公式计算:

(1) $(2a+5b)^2$;

(2) $(4x-3y)^2$;

(3) $(-2m-1)^2$;

(4) $(1.5a - \frac{2}{3}b)^2$;

(5) 63^2 ;

(6) 98^2 .

综合运用

3. 运用乘法公式计算:

(1) $(3x-5)^2 - (2x+7)^2$;

(2) $(x+y+1)(x+y-1)$;

(3) $(2x-y-3)^2$;

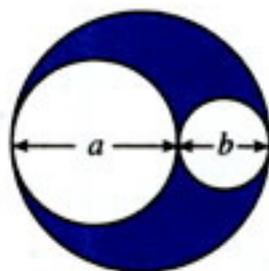
(4) $[(x+2)(x-2)]^2$.

4. 先化简, 再求值:

$(2x+3y)^2 - (2x+y)(2x-y)$, 其中 $x = \frac{1}{3}$, $y = -\frac{1}{2}$.

5. 一个正方形的边长增加 3 cm, 它的面积就增加 39 cm^2 , 这个正方形的边长是多少?

6. 如图, 一块直径为 $a+b$ 的圆形钢板, 从中挖去直径分别为 a 与 b 的两个圆, 求剩下的钢板的面积.



(第 6 题)

拓广探索

7. 已知 $a+b=5$, $ab=3$, 求 a^2+b^2 的值. (提示: 利用公式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$)

8. 解不等式 $(2x-5)^2 + (3x+1)^2 > 13(x^2-10)$.

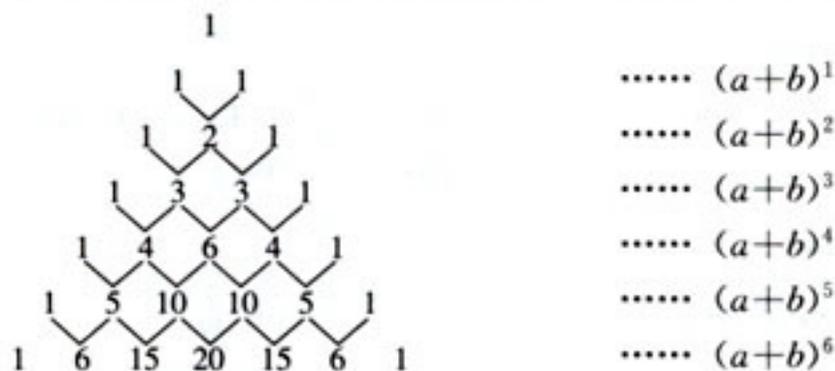
9. 解方程组

$$\begin{cases} (x+2)^2 - (y-3)^2 = (x+y)(x-y), \\ x-3y=2. \end{cases}$$



杨辉三角

我国著名数学家华罗庚教授，曾在给青少年撰写的《数学是我国人民所擅长的学科》一文中谈到，我国古代数学的许多创新与发现都曾居世界前列。华老说：“实际上我们祖国伟大人民在人类史上，有过无比睿智的成就”，其中“杨辉三角”（见下表）就是一例。



这个三角形的构造法则是：两腰都是1，其余每个数为其上方左右两数之和。它给出了 $(a+b)^n$ (n 是正整数) 展开式（按 a 的次数由大到小的顺序排列）的系数规律。例如，在三角形中第三行的三个数 1, 2, 1，恰好对应着 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 展开式中的系数；第四行的四个数 1, 3, 3, 1，恰好对应着 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 展开式中的系数等等。

根据上面的三角形，你能写出 $(a+b)^4$ 、 $(a+b)^5$ 的展开式吗？请利用多项式的乘法验证你的结果。

上面的三角形在我国宋朝数学家杨辉所著的《详解九章算术》（1261年）一书中用过，杨辉在注释中提到，贾宪也用过上述方法。因此我们称这个三角形为“杨辉三角”或“贾宪三角”。

这个三角形被欧洲学者称为“帕斯卡三角”，这是因为法国数学家帕斯卡于1654年发现了此表，他这一成果比杨辉晚了近400年，比贾宪晚了近600年。



例 1 计算:

(1) $x^8 \div x^2$; (2) $a^4 \div a$; (3) $(ab)^5 \div (ab)^2$.

解: (1) $x^8 \div x^2 = x^{8-2} = x^6$.

(2) $a^4 \div a = a^{4-1} = a^3$.

(3) $(ab)^5 \div (ab)^2 = (ab)^{5-2} = (ab)^3 = a^3b^3$.



分别根据除法的意义填空, 你能得出什么结论?

(1) $3^2 \div 3^2 = (\quad)$;

(2) $10^3 \div 10^3 = (\quad)$;

(3) $a^m \div a^m = (\quad) (a \neq 0)$.

根据除法的意义, 可知

$$a^m \div a^m = 1.$$

如果依照同底数幂的除法 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ($m > n$) 来处理 $a^m \div a^m$, 又可得

$$a^m \div a^m = a^{m-m} = a^0.$$

于是规定:

$$a^0 = 1 (a \neq 0).$$

即任何不等于 0 的数的 0 次幂都等于 1.

练习

1. 填空:

$$(1) a^5 \cdot (\quad) = a^7;$$

$$(2) m^3 \cdot (\quad) = m^8;$$

$$(3) x^3 \cdot x^5 \cdot (\quad) = x^{12};$$

$$(4) (-6)^3 (\quad) = (-6)^5.$$

2. 计算:

$$(1) x^7 \div x^5;$$

$$(2) m^8 \div m^3;$$

$$(3) (-a)^{10} \div (-a)^7;$$

$$(4) (xy)^5 \div (xy)^3.$$

3. 下面的计算对不对? 如果不对, 应当怎样改正?

$$(1) x^6 \div x^2 = x^3;$$

$$(2) 6^4 \div 6^4 = 6;$$

$$(3) a^3 \div a = a^3;$$

$$(4) (-c)^4 \div (-c)^2 = -c^2.$$

15.4.2 整式的除法



问题 木星的质量约是 1.90×10^{24} 吨, 地球的质量约是 5.98×10^{21} 吨, 你知道木星的质量约为地球质量的多少倍吗?

木星的质量约为地球质量的 $(1.90 \times 10^{24}) \div (5.98 \times 10^{21})$ 倍.



(1) 计算 $(1.90 \times 10^{24}) \div (5.98 \times 10^{21})$, 说说你计算的根据是什么?

(2) 你能利用(1)中的方法计算下列各式吗?

$$8a^3 \div 2a; 6x^3y \div 3xy; 12a^3b^2x^3 \div 3ab^2.$$

(3) 你能根据(2)说说单项式除以单项式的运算法则吗?

$8a^3 \div 2a$ 是 $(8a^3) \div (2a)$ 的意思.

计算 $12a^3b^2x^3 \div 3ab^2$ ，就是要求一个单项式，使它与 $3ab^2$ 的乘积等于 $12a^3b^2x^3$ 。

$$\because 4a^2x^3 \cdot 3ab^2 = 12a^3b^2x^3,$$

$$\therefore 12a^3b^2x^3 \div 3ab^2 = 4a^2x^3.$$

上面的商式 $4a^2x^3$ 的系数 $4 = 12 \div 3$ ， a 的指数 $2 = 3 - 1$ ， b 的指数 $0 = 2 - 2$ ，而 $b^0 = 1$ ， x 的指数 $3 = 3 - 0$ 。

单项式相除，把系数与同底数幂分别相除作为商的因式，对于只在被除式里含有的字母，则连同它的指数作为商的一个因式。

例 2 计算：

$$(1) 28x^4y^2 \div 7x^3y; \quad (2) -5a^5b^3c \div 15a^4b.$$

$$\begin{aligned} \text{解：(1)} \quad 28x^4y^2 \div 7x^3y \\ &= (28 \div 7) \cdot x^{4-3} \cdot y^{2-1} \\ &= 4xy. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad -5a^5b^3c \div 15a^4b \\ &= [(-5) \div (15)]a^{5-4}b^{3-1}c \\ &= -\frac{1}{3}ab^2c. \end{aligned}$$

练习

1. 计算:

$$(1) 10ab^3 \div (-5ab);$$

$$(2) -8a^2b^3 \div 6ab^2;$$

$$(3) -21x^2y^4 \div (-3x^2y^3);$$

$$(4) (6 \times 10^8) \div (3 \times 10^5).$$

2. 把图中左边括号里的每一个式子分别除以 $2x^2y$, 然后把商式写在右边括号里.

$$\left(\begin{array}{l} 4x^3y \\ -12x^4y^3 \\ -16x^2yz \\ \frac{1}{2}x^2y \end{array} \right) \xrightarrow{\div 2x^2y} \left(\begin{array}{l} 2x \\ \\ \\ \end{array} \right)$$

(第2题)

讨论

计算下列各式, 说说你是怎样计算的.

$$(1) (am+bm) \div m;$$

$$(2) (a^2+ab) \div a;$$

$$(3) (4x^2y+2xy^2) \div 2xy.$$

计算 $(am+bm) \div m$, 就是要求一个多项式, 使它与 m 的积是 $am+bm$.

$$\because (a+b)m = am+bm,$$

$$\therefore (am+bm) \div m = a+b.$$

$$\text{又 } am \div m + bm \div m = a+b,$$

$$\therefore (am+bm) \div m = am \div m + bm \div m.$$

把多项式除以单项式问题转化为单项式除以单项式问题来解决.

多项式除以单项式，先把这个多项式的每一项除以这个单项式，再把所得的商相加。

例3 计算：

$$(1) (12a^3 - 6a^2 + 3a) \div 3a;$$

$$(2) (21x^4y^3 - 35x^3y^2 + 7x^2y^2) \div (-7x^2y);$$

$$(3) [(x+y)^2 - y(2x+y) - 8x] \div 2x.$$

解：(1) $(12a^3 - 6a^2 + 3a) \div 3a$
 $= 12a^3 \div 3a - 6a^2 \div 3a + 3a \div 3a$
 $= 4a^2 - 2a + 1.$

$$(2) (21x^4y^3 - 35x^3y^2 + 7x^2y^2) \div (-7x^2y)$$
$$= -3x^2y^2 + 5xy - y.$$

$$(3) [(x+y)^2 - y(2x+y) - 8x] \div 2x$$
$$= (x^2 + 2xy + y^2 - 2xy - y^2 - 8x) \div 2x$$
$$= (x^2 - 8x) \div 2x$$
$$= \frac{1}{2}x - 4.$$

练习

计算：

$$(1) (6xy + 5x) \div x; \quad (2) (15x^2y - 10xy^2) \div 5xy;$$

$$(3) (8a^2 - 4ab) \div (-4a); \quad (4) (25x^3 + 15x^2 - 20x) \div (-5x).$$

习题15.4

复习巩固

1. 计算:

$$(1) (ax)^5 \div (ax)^3;$$

$$(2) (x^2)^5 \div (x^2)^2;$$

$$(3) (a^3)^2 \div (a^2)^3;$$

$$(4) (ab^2)^3 \div (-ab)^2.$$

2. 计算:

$$(1) 24x^2y \div (-6xy);$$

$$(2) (-5r^2)^2 \div 5r^4;$$

$$(3) 7m(4m^2p)^2 \div 7m^2;$$

$$(4) (-12s^4t^6) \div \left(\frac{1}{2}s^2t^3\right)^2.$$

3. 计算:

$$(1) (6x^4 - 8x^3) \div (-2x^2);$$

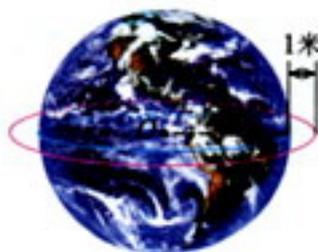
$$(2) (8a^3b - 5a^2b^2) \div 4ab;$$

$$(3) \left(\frac{2}{5}y^3 - 7y^2 + \frac{2}{3}y\right) \div \frac{2}{3}y;$$

$$(4) \left(0.25a^2b - \frac{1}{2}a^3b^2 - \frac{1}{6}a^4b^3\right) \div (-0.5a^2b).$$

综合运用

4. 一颗人造地球卫星的速度是 2.88×10^7 米/时, 一架喷气飞机的速度是 1.8×10^6 米/时, 这颗人造地球卫星的速度是这架喷气式飞机的速度的多少倍?
5. 已知 1 米 = 10^9 纳米, 某种病毒的直径为 100 纳米, 多少个这种病毒能排成 1 毫米长?
6. 如图, 在半径 R 为 0.5 米的地球仪的表面之外, 距赤道 1 米拉一条绳子绕地球仪一周, 这条绳长比地球仪的赤道的周长多几米? 如果在地球赤道表面也同样做, 情况又怎样 (已知地球半径为 6 370 千米, π 取 3.14)?



(第 6 题)

拓广探索

7. 已知 $2^m = a$, $32^n = b$, 求 2^{3m+10n} .
8. 已知 $2x - y = 10$, 求代数式 $[(x^2 + y^2) - (x - y)^2 + 2y(x - y)] \div 4y$ 的值.

15.5 因式分解



630 能被哪些数整除？说说你是怎样想的。

在小学我们知道，要想解决这个问题，需要把 630 分解成质数的乘积的形式，即

$$630 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7.$$

类似地，在式的变形中，有时需要将一个多项式写成几个整式的乘积的形式。



请把下列多项式写成整式的乘积的形式：

(1) $x^2 + x = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) $x^2 - 1 = \underline{\hspace{2cm}}$.

$$\begin{aligned} x(x+1) &= x^2 + x, \\ (x+1)(x-1) &= x^2 - 1. \end{aligned}$$

我们根据整式的乘法，可以联想得到

$$x^2 + x = x(x+1),$$

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1).$$

上面我们把一个多项式化成了几个整式的积的形式，像这样的式子变形叫做把这个多项式**因式分解** (factoring)，也叫做把这个多项式**分解因式**。

可以看出，因式分解与整式乘法是相反方向的变形，即

$$x^2 - 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{因式分解}} \\ \xleftarrow{\text{整式乘法}} \end{array} (x+1)(x-1).$$

下面我们探讨因式分解的两种基本方法.

15.5.1 提公因式法

我们看多项式

$$ma + mb + mc,$$

它的各项都有一个公共的因式 m ，我们把因式 m 叫做这个多项式各项的**公因式** (common factor).

由 $m(a+b+c) = ma + mb + mc$ ，可得

$$ma + mb + mc = m(a+b+c).$$

这样就把 $ma + mb + mc$ 分解成两个因式乘积的形式，其中一个因式是各项的公因式 m ，另一个因式 $(a+b+c)$ 是 $ma + mb + mc$ 除以 m 所得的商. 像这种分解因式的方法叫做**提公因式法**.

下面我们看几个利用提公因式法分解因式的例子.

例 1 把 $8a^3b^2 + 12ab^3c$ 分解因式.

分析：先找出 $8a^3b^2$ 与 $12ab^3c$ 的公因式，再提出公因式. 我们看这两项的系数 8 与 12，它们的最大公约数是 4；两项的字母部分 a^3b^2 与 ab^3c 都含有字母 a 和 b ，其中 a 的最低次数是 1， b 的最低次数是 2，我们选定 $4ab^2$ 为要提出的公因式. 提出公因式 $4ab^2$ 后，另一个因式 $2a^2 + 3bc$ 就不再有公因式了.

$$\begin{aligned} \text{解：} \quad & 8a^3b^2 + 12ab^3c \\ &= 4ab^2 \cdot 2a^2 + 4ab^2 \cdot 3bc \\ &= 4ab^2(2a^2 + 3bc). \end{aligned}$$

如果提出公因式 $4ab$ ，另一个因式是否还有公因式？

例 2 把 $2a(b+c)-3(b+c)$ 分解因式.

分析: $(b+c)$ 是这两个式子的公因式, 可以直接提出.

解:
$$\begin{aligned} & 2a(b+c)-3(b+c) \\ &= (b+c)(2a-3). \end{aligned}$$

如何检查因式分解是否正确?

练习

1. 把下列各式分解因式:

(1) $8m^2n+2mn$;

(2) $12xyz-9x^2y^2$;

(3) $2a(y-z)-3b(z-y)$;

(4) $p(a^2+b^2)-q(a^2+b^2)$.

2. 先分解因式, 再求值:

$4a^2(x+7)-3(x+7)$, 其中 $a=-5$, $x=3$.

3. 计算 $5 \times 3^4 + 24 \times 3^3 + 63 \times 3^2$.

15.5.2 公式法



你能将多项式 x^2-4 与多项式 y^2-25 分解因式吗? 这两个多项式有什么共同的特点?

这两个多项式都可以写成两个数的平方差的形式, 对于这种形式的多项式, 可以利用平方差公式来分解因式.

把整式乘法的平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 反过来, 就得到

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b),$$

即两个数的平方差，等于这两个数的和与这两个数的差的积。

例 3 分解因式：

(1) $4x^2 - 9$; (2) $(x+p)^2 - (x+q)^2$.

分析：在(1)中， $4x^2 = (2x)^2$ ， $9 = 3^2$ ， $4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2$ ，即可用平方差公式分解因式。

解：(1) $4x^2 - 9$
 $= (2x)^2 - 3^2$
 $= (2x+3)(2x-3).$

(2) $(x+p)^2 - (x+q)^2$
 $= [(x+p) + (x+q)][(x+p) - (x+q)]$
 $= (2x+p+q)(p-q).$

把 $(x+p)$ 和 $(x+q)$ 各看成一个整体，设 $x+p=m$ ， $x+q=n$ ，则原式化为 $m^2 - n^2$ 。

例 4 分解因式：

(1) $x^4 - y^4$; (2) $a^3b - ab$.

分析：(1) $x^4 - y^4$ 可以写成 $(x^2)^2 - (y^2)^2$ 的形式，这样就可以利用平方差公式进行因式分解了。

(2) $a^3b - ab$ 有公因式 ab ，应先提出公因式，再进一步分解。

解：(1) $x^4 - y^4$
 $= (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$
 $= (x^2 + y^2)(x+y)(x-y).$

(2) $a^3b - ab$
 $= ab(a^2 - 1)$
 $= ab(a+1)(a-1).$

分解因式，必须进行到每一个多项式因式都不能再分解为止。

练习

1. 下列多项式能否用平方差公式来分解因式？为什么？

- (1) $x^2 + y^2$; (2) $x^2 - y^2$;
(3) $-x^2 + y^2$; (4) $-x^2 - y^2$.

2. 分解因式：

- (1) $a^2 - \frac{1}{25}b^2$; (2) $9a^2 - 4b^2$;
(3) $x^2y - 4y$; (4) $-a^4 + 16$.



你能将多项式 $a^2 + 2ab + b^2$ 与 $a^2 - 2ab + b^2$ 分解因式吗？这两个多项式有什么特点？

这两个多项式是两个数的平方和加上或减去这两个数的积的 2 倍，这恰是两数和或差的平方，我们把 $a^2 + 2ab + b^2$ 和 $a^2 - 2ab + b^2$ 这样的式子叫做完全平方式，利用完全平方公式可以把形如完全平方式的多项式因式分解。

把整式乘法的完全平方公式

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

反过来，就得到

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2,$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2,$$

即两个数的平方和加上（或减去）这两个数的积的 2 倍，等于这两个数的和（或差）的平方。

例 5 分解因式:

(1) $16x^2+24x+9$; (2) $-x^2+4xy-4y^2$.

分析: 在(1)中, $16x^2=(4x)^2$, $9=3^2$, $24x=2 \cdot 4x \cdot 3$, 所以 $16x^2+24x+9$ 是一个完全平方式, 即

$$16x^2+24x+9=(4x)^2+2 \cdot 4x \cdot 3+3^2.$$

$$\begin{array}{ccccccc} \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ a^2 & + & 2 & \cdot & a & \cdot & b & + & b^2. \end{array}$$

解: (1) $16x^2+24x+9=(4x)^2+2 \cdot 4x \cdot 3+3^2$
 $= (4x+3)^2.$

(2) $-x^2+4xy-4y^2=-(x^2-4xy+4y^2)$
 $=-[x^2-2 \cdot x \cdot 2y+(2y)^2]$
 $=-(x-2y)^2.$

例 6 分解因式:

(1) $3ax^2+6axy+3ay^2$;

(2) $(a+b)^2-12(a+b)+36$.

分析: 在(1)中有公因式 $3a$, 应先提出公因式, 再进一步分解.

解: (1) $3ax^2+6axy+3ay^2$
 $=3a(x^2+2xy+y^2)$
 $=3a(x+y)^2.$

(2) $(a+b)^2-12(a+b)+36$
 $= (a+b)^2-2 \cdot (a+b) \cdot 6+6^2$
 $= (a+b-6)^2.$

将 $a+b$ 看作一个整体, 设 $a+b=m$, 则原式化为完全平方式 $m^2-12m+36$.

练习

1. 下列多项式是不是完全平方式？为什么？

(1) $a^2 - 4a + 4$;

(2) $1 + 4a^2$;

(3) $4b^2 + 4b - 1$;

(4) $a^2 + ab + b^2$.

2. 分解因式：

(1) $x^2 + 12x + 36$;

(2) $-2xy - x^2 - y^2$;

(3) $a^2 + 2a + 1$;

(4) $4x^2 - 4x + 1$;

(5) $ax^2 + 2a^2x + a^3$;

(6) $-3x^2 + 6xy - 3y^2$.

习题15.5

复习巩固

分解因式（第1~3题）：

1. (1) $15a^3 + 10a^2$;

(2) $12abc - 3bc^2$;

(3) $6p(p+q) - 4q(p+q)$;

(4) $m(a-3) + 2(3-a)$.

2. (1) $1 - 36b^2$;

(2) $12x^2 - 3y^2$;

(3) $0.49p^2 - 144$;

(4) $(2x+y)^2 - (x+2y)^2$.

3. (1) $1 + 10t + 25t^2$;

(2) $m^2 - 14m + 49$;

(3) $y^2 + y + \frac{1}{4}$;

(4) $(m+n)^2 - 4m(m+n) + 4m^2$;

(5) $25a^2 - 80a + 64$;

(6) $a^2 + 2a(b+c) + (b+c)^2$.

综合运用

4. 利用因式分解计算：

(1) $21 \times 3.14 + 62 \times 3.14 + 17 \times 3.14$;

(2) $758^2 - 258^2$.

5. 分解因式：

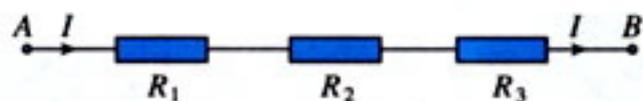
(1) $(a-b)^2 + 4ab$;

(2) $(p-4)(p+1) + 3p$;

(3) $4xy^2 - 4x^2y - y^3$;

(4) $3ax^2 - 3ay^2$.

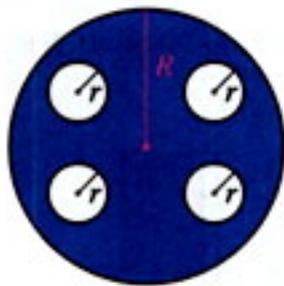
6. 如图, 把 R_1, R_2, R_3 三个电阻串联起来, 线路 AB 上的电流为 I , 电压为 V , 则 $V = IR_1 + IR_2 + IR_3$. 当 $R_1 =$



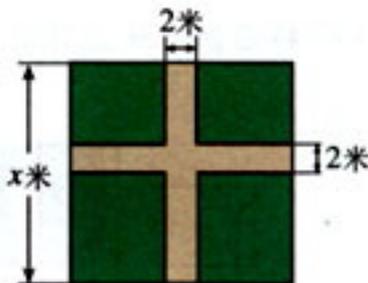
(第6题)

$19.7, R_2 = 32.4, R_3 = 35.9, I = 2.5$ 时, 求 V 的值.

7. 如图, 在半径为 R 的圆形钢板上, 冲去半径为 r 的四个小圆, 计算当 $R = 7.8 \text{ cm}, r = 1.1 \text{ cm}$ 时剩余部分的面积 (π 取 3.14).



(第7题)



(第8题)

8. 如图, 某小区规划在边长为 $x \text{ m}$ 的正方形场地上, 修建两条宽为 2 m 的甬道, 其余部分种草, 你能用几种方法计算甬道所占的面积?

拓广探索

9. 已知 $4y^2 + my + 9$ 是完全平方式, 求 m 的值.

10. 观察下列式子:

$$2 \times 4 + 1 = 9 = 3^2; \quad 6 \times 8 + 1 = 49 = 7^2; \quad 14 \times 16 + 1 = 225 = 15^2.$$

你得出了什么结论? 你能证明这个结论吗?

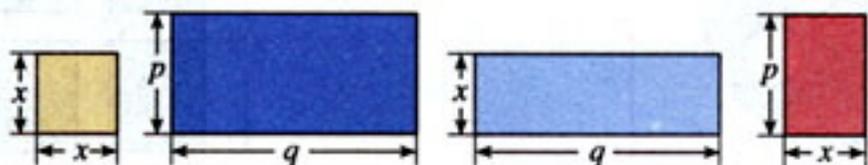
11. 在实数范围内分解因式:

(1) $x^2 - 2$; (2) $5x^2 - 3$.

(提示: 根据平方根的意义把各式写成平方差的形式.)

 $x^2 + (p+q)x + pq$ 型式子的因式分解

将下图中的 1 个正方形和 3 个长方形拼成一个大长方形，请观察这四个图形的面积与拼成的大长方形的面积有什么关系，你能据此将 $x^2 + (p+q)x + pq$ 分解因式吗？



事实上，

$$\begin{aligned}
 & x^2 + (p+q)x + pq \\
 &= x^2 + px + qx + pq \\
 &= (x^2 + px) + (qx + pq) \text{ (加法结合律)} \\
 &= x(x+p) + q(x+p) \\
 &= (x+p)(x+q).
 \end{aligned}$$

这样，我们得到

$$x^2 + (p+q)x + pq = (x+p)(x+q). \quad \textcircled{1}$$

利用①式可以将某些二次项系数是 1 的二次三项式分解因式。

例 把 $x^2 + 3x + 2$ 分解因式。

分析： $x^2 + 3x + 2$ 中的二次项系数是 1，常数项 $2 = 1 \times 2$ ，一次项系数 $3 = 1 + 2$ ，这是一个 $x^2 + (p+q)x + pq$ 型式子。

$$\begin{aligned}
 \text{解：} \quad & x^2 + 3x + 2 \\
 &= (x+1)(x+2).
 \end{aligned}$$

请利用①式将下列多项式分解因式：

- (1) $x^2 + 7x + 10$; (2) $x^2 - 2x - 8$;
 (3) $y^2 - 7y + 12$; (4) $x^2 + 7x - 18$.

数学活动

活动 1

图 1 是某月的月历。

(1) 浅色方框中的 9 个数之和与方框正中心的数有什么关系？

(2) 如果将浅色方框移至图 2 的位置，又如何？

(3) 不改变方框的大小，将方框移动几个位置试一试，你能得出什么结论？你能证明这个结论吗？

(4) 这个结论对于任何一个月的月历都成立吗？

(5) 如图 3，如果浅色方框里的数是 4 个，你能得出什么结论？

(6) 如图 4，对于浅色框中的 4 个数，又能得出什么结论？

	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

图 1

	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

图 2

	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

图 3

	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

图 4

活动 2

(1) 计算下列两个数的积，这两个数的十位上的数字相同，个位上的数字之和等于 10. 你发现结果有什么规律？

$$53 \times 57, 38 \times 32, 84 \times 86, 71 \times 79.$$

(2) 你能用本章所学知识解释这个规律吗？

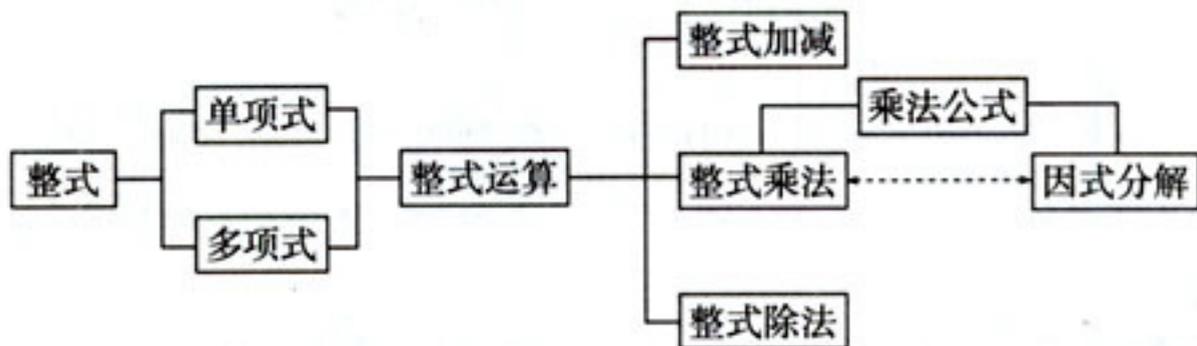
(提示：个位上的数字为 b ，十位上的数字为 a 的两位数可以表示成 $10a+b$.)

(3) 利用你发现的规律计算：

$$58 \times 52, 63 \times 67, 75^2, 95^2.$$

小 结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

1. 整式中的字母表示数，整式运算建立在数的运算的基础之上，数的运算是整式运算的特殊情况。你能类比数的运算律与运算性质谈一谈整式的运算律与运算性质吗？

2. 合并同类项是整式加减的基础。举例说明怎样合并同类项以及这样做的依据是什么。

3. 幂的运算性质是整式乘除的基础，单项式的乘除是整式乘除的关键。举例说明怎样将多项式乘（除以）单项式、多项式乘多项式转化为单项式的乘除。

4. 把一些特殊形式的多项式乘法写成公式的形式，可以简化运算。本章学习了哪几个乘法公式？你能从图形的角度解释乘法公式的合理性吗？

5. 举例说明因式分解与整式乘法之间的关系。你学习了哪几种分解因式的方法？请举例说明。

复习题15

复习巩固

1. 计算:

$$(1) (4a^2b - 3ab) + (-5a^2b + 2ab); \quad (2) (6m^2 - 4m - 3) + (2m^2 - 4m + 1);$$

$$(3) (5a^2 + 2a - 1) - 4(3 - 8a + 2a^2); \quad (4) 3x^2 - \left[5x - \left(\frac{1}{2}x - 3 \right) + 2x^2 \right].$$

2. 计算:

$$(1) (-2x^2y^3)^2 \cdot (xy)^3; \quad (2) (2a + 3b)(2a - b);$$

$$(3) 5x^2(x + 1)(x - 1); \quad (4) (2x + y - 1)^2;$$

$$(5) 59.8 \times 60.2; \quad (6) 198^2.$$

3. 计算:

$$(1) (2a)^3 \cdot b^4 \div 12a^3b^2; \quad (2) \left(-\frac{2}{3}a^7b^5 \right) \div \frac{3}{2}a^2b^5;$$

$$(3) \left(\frac{6}{5}a^3x^4 - 0.9ax^3 \right) \div \frac{3}{5}ax^3; \quad (4) (7x^2y^3 - 8x^3y^2z) \div 8x^2y^2;$$

$$(5) 12^{13} \div (3^{10} \cdot 4^{11}); \quad (6) (5^4 \times 3^3 - 5^3 \times 3^2 + 5^2 \times 3) \div 15.$$

4. 分解因式:

$$(1) 25x^2 - 16y^2; \quad (2) (a - b)(x - y) - (b - a)(x + y);$$

$$(3) a^2 - 4ab + 4b^2; \quad (4) 4 + 12(x - y) + 9(x - y)^2.$$

综合运用

5. 计算:

$$(1) 4(x + 1)^2 - (2x + 5)(2x - 5); \quad (2) 2x \cdot \left(\frac{1}{2}x - 1 \right) - 3x \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \right);$$

$$(3) 3(y - z)^2 - (2y + z)(-z + 2y);$$

$$(4) [x(x^2y^2 - xy) - y(x^2 - x^3y)] \div 3x^2y.$$

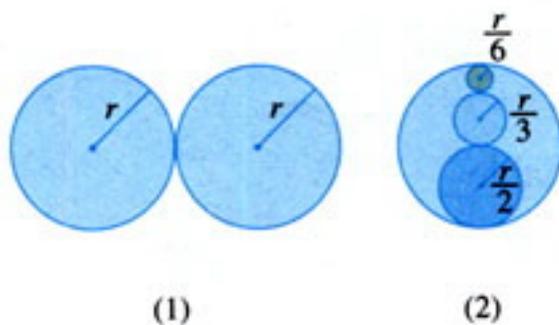
6. 分解因式:

$$(1) x^3 - 9x; \quad (2) 16x^4 - 1;$$

$$(3) 6xy^2 - 9x^2y - y^3; \quad (4) (2a - b)^2 + 8ab.$$

7. 已知 $(x + y)^2 = 25$, $(x - y)^2 = 9$, 求 xy 与 $x^2 + y^2$ 的值.

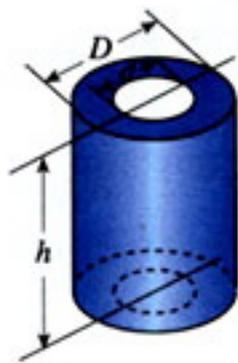
8. 我国陆地面积约是 9.6×10^6 平方千米. 平均每平方千米的土地上, 一年从太阳得到的能量相当于燃烧 1.3×10^5 吨煤所产生的能量. 求在我国领土上, 一年内从太阳得到的能量约相当于燃烧多少吨煤所产生的能量 (保留两个有效数字).
9. 某公园计划砌一个形状如图(1)的喷水池, 后来有人建议改为图(2)的形状, 且外圆的直径不变, 请你比较两种方案, 确定哪一种方案砌各圆形水池的周边需用的材料多.
(提示: 比较两种方案中各圆形水池周长的和.)



(1)

(2)

(第9题)



(第10题)

10. 如图, 水压机有四根空心钢立柱, 每根高都是 18 米, 外径 D 为 1 米, 内径 d 为 0.4 米. 每立方米钢的质量为 7.8 吨, 求 4 根立柱的总质量 (π 取 3.14).

拓广探索

11. 解方程

$$(x+7)(x+5) - (x+1)(x+5) = 42.$$

12. 解不等式组

$$\begin{cases} x(2x-5) > 2x^2 - 3x - 4, \\ (x+1)(x+3) + 8x > (x+5)(x-5) - 2. \end{cases}$$

13. 求证: 当 n 是整数时, 两个连续奇数的平方差 $(2n+1)^2 - (2n-1)^2$ 是 8 的倍数.

14. 某种产品的原料提价, 因而厂家决定对产品进行提价, 现有三种方案:

方案 1: 第一次提价 $p\%$, 第二次提价 $q\%$.

方案 2: 第一次提价 $q\%$, 第二次提价 $p\%$.

方案 3: 第一、二次提价均为 $\frac{p+q}{2}\%$.

其中 p 、 q 是不相等的正数. 三种方案哪种提价最多?

(提示: 因为 $p \neq q$, $(p-q)^2 = p^2 - 2pq + q^2 > 0$, 所以 $p^2 + q^2 > 2pq$.)

部分中英文词汇索引

中文	英文	页码
变量	variable	5
常量	constant	5
自变量	independent variable	7
函数	function	7
图象	graph	11
正比例函数	proportional function	23
一次函数	linear function	27
频数	frequency	55
条形图	bar graph	55
扇形图	pie chart	56
频数分布	frequency distribution	62
直方图	histogram	63
全等形	congruent figures	90
全等三角形	congruent triangles	90
轴对称图形	symmetric figure	119
对称轴	axis of symmetry	119
对称点	symmetric points	120
垂直平分线	perpendicular bisector	121
等腰三角形	isosceles triangle	140
等边三角形	equilateral triangle	146
单项式	monomial	162
系数	coefficient	162
次数	degree	162
多项式	polynomial	163
项	term	163

常数项	constant term	163
整式	integral expression	163
平方差公式	formula for the difference of squares	179
完全平方公式	formula for the square of the sum	182
因式分解	factoring	194
公因式	common factor	195

后 记

根据教育部制定的《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》，我们编写了本套实验教科书，在这套书的编写过程中得到许多专家、学者和教师的帮助和支持，在此向他们深表感谢。

课 程 教 材 研 究 所
中学数学课程教材研究开发中心