

义务教育课程标准实验教科书

数 学

八年级 下册

(复核本)

本册导引

亲爱的同学们，新学期开始了。

摆在你面前的这本书，是根据《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》编写的实验教科书八年级下册。在这本书中，你将继续乘坐“观察”“思考”“探究”“讨论”“归纳”之舟，徜徉在数学的海洋里，去探索数学的奥秘；你还要用学到的本领解决“复习巩固”“综合运用”“拓广探索”三个层次的问题；你可以有选择地进行“数学活动”；如果有兴趣，你还可以到“阅读与思考”“观察与猜想”“实验与探究”“信息技术应用”这些选学内容中去看看更广阔的数学世界。通过探索、尝试，相信你的聪明才智会得到充分的发挥，你用数学解决问题的能力会迈上一个新的台阶。

现在，让我们启航，一起去遨游八年级下册这片新海域吧！

数有整数与分数之分，式也有整式与分式之别。在“**分式**”一章你将看到，分式与分数就像姐妹一样，有很多共同的特征，在分式的身上你能很容易地找到分数的影子；认识了分式，你会感到它为我们研究数量关系带来更大的方便。

我们曾经认识了一次函数，此次航行，我们将认识一位新朋友——“**反比例函数**”，通过探究，你会发现它的图象和性质，感受它在解决实际问题中的作用，进一步认识函数这个家族在现实世界中的重要作用。

三角形中还有许多奥秘等着你去挖掘。你知道直角三角形的三条边有怎样的关系吗？请你到“**勾股定理**”中去探索，在探索的过程中你

会由衷地感叹数学的美妙与和谐。

在我们生活的空间随处可以见到四边形的身影，长方形、正方形、平行四边形和梯形等各种各样的四边形装点着我们的生活，给我们的生活带来美的感受。这些特殊的四边形之间有什么联系和区别，它们有怎样的性质，怎样更好地发挥它们在实际中的作用？通过“**四边形**”一章的学习，你会对这些四边形有更深的认识。

我们已经认识一些数据处理的基本方法，看到统计在现代生活中扮演着越来越重要的角色。“**数据的分析**”为你提供更多的机会，进一步学习数据处理的方法和策略，比如怎样分析数据的平均水平，如何刻画数据的波动程度等，通过一些有趣的调查活动，你会对数据的作用有更多的认识，对用样本估计总体的思想有更多的体会。

数学伴着我们成长、数学伴着我们进步、数学伴着我们成功，让我们随着这本书，继续畅游神奇、美妙的数学世界吧！



目 录

第十六章 分 式 2

16.1 分式 4
16.2 分式的运算 13
 阅读与思考 容器中的水能倒完吗 29
16.3 分式方程 31
数学活动 40
小结 41
复习题 16 42

第十七章 反比例函数 44

17.1 反比例函数 46
 信息技术应用 探索反比例函数的性质 55
17.2 实际问题与反比例函数 57
 阅读与思考 生活中的反比例关系 63
数学活动 65
小结 66
复习题 17 67

第十八章 勾股定理 70



18.1 勾股定理	72
阅读与思考	
勾股定理的证明	80
18.2 勾股定理的逆定理	81
数学活动	86
小结	87
复习题 18	88

第十九章 四边形 90



19.1 平行四边形	92
阅读与思考	
平行四边形法则	102
19.2 特殊的平行四边形	103
实验与探究	
巧拼正方形	116
19.3 梯 形	117
观察与猜想	
平面直角坐标系中的特殊四边形	122
19.4 课题学习 重心	123
数学活动	126
小结	129
复习题 19	131



第二十章 数据的分析 134

20.1 数据的代表	136
20.2 数据的波动	151
信息技术应用	
用计算机求几种统计量	157
阅读与思考	
数据波动的几种度量	160
20.3 课题学习 体质健康测试中的数据分析	162
数学活动	166
小结	167
复习题 20	168

部分中英文词汇索引 170

第十六章 分式





16

- 16.1 分式
- 16.2 分式的运算
- 16.3 分式方程

在研究许多问题时会用到整式以外的式子。请看下面的问题：

一艘轮船在静水中的最大航速为20千米/时，它沿江以最大航速顺流航行100千米所用时间，与以最大航速逆流航行60千米所用时间相等，江水的流速为多少？

我们可以直接利用“两次航行所用时间相等”这个关系分析问题。

设江水流速为 v 千米/时，则轮船顺流航行100千米所用时间为 $\frac{100}{20+v}$ 小时，逆流航行60千米所用时间为 $\frac{60}{20-v}$ 小时，由方程 $\frac{100}{20+v}=\frac{60}{20-v}$ 可以解出 v 的值。

以上我们用了式子 $\frac{100}{20+v}$ 和 $\frac{60}{20-v}$ ，像这样分母中含有字母的式子属于分式。本章中，我们将学习分式及其基本性质、运算和应用，这将会给我们进一步研究数量关系带来很大的方便。

$$\frac{100}{20+v} = \frac{60}{20-v}$$



16.1 分式

16.1.1 从分数到分式

同 $5 \div 3$ 可以写成 $\frac{5}{3}$ 一样，式子 $A \div B$ 可以写成 $\frac{A}{B}$.



思 考

填空：

(1) 长方形的面积为 10 cm^2 ，长为 7 cm ，宽应为 _____ cm；长方形的面积为 S ，长为 a ，宽应为 _____ ；

(2) 把体积为 200 cm^3 的水倒入底面积为 33 cm^2 的圆柱形容器中，水面高度为 _____ cm；把体积为 V 的水倒入底面积为 S 的圆柱形容器中，水面高度为 _____ .

上面问题中，填出的依次是 $\frac{10}{7}$, $\frac{S}{a}$, $\frac{200}{33}$, $\frac{V}{S}$.



观 察

式子 $\frac{S}{a}$, $\frac{V}{S}$ 以及引言中的式子 $\frac{100}{20+v}$, $\frac{60}{20-v}$ 有什么共同点？它们与分数有什么相同点和不同点？

可以发现，这些式子与分数一样都是 $\frac{A}{B}$ (即 $A \div B$) 的形式。分数的分子 A 与分母 B 都是整

数，而这些式子中的 A 、 B 都是整式，并且 B 中都含有字母。

归 纳

一般地，如果 A 、 B 表示两个整式，并且 B 中含有字母，那么式子 $\frac{A}{B}$ 叫做分式 (fraction)。

分式 $\frac{A}{B}$ 中， A 叫做分子， B 叫做分母。

分式是不同于整式的另一类式子。上面的 $\frac{S}{a}$ 、 $\frac{V}{S}$ 、 $\frac{100}{20+v}$ 和 $\frac{60}{20-v}$ 等都是分式。

分式比分数更具有普遍性。例如，分数 $\frac{2}{3}$ 仅表示 $2 \div 3$ 的商，而分式 $\frac{x}{y}$ 则可以表示任意两个整式相除的商（除式不等于 0），其中包括 $2 \div 3$ 。



分式中的分母应满足什么条件？

分式的分母表示除数，由于除数不能为 0，所以分式的分母不能为 0，即当 $B \neq 0$ 时，分式 $\frac{A}{B}$ 才有意义。

例 1 填空：

(1) 当 x _____ 时，分式 $\frac{2}{3x}$ 有意义；

(2) 当 x _____ 时，分式 $\frac{x}{x-1}$ 有意义；

(3) 当 b _____ 时, 分式 $\frac{1}{5-3b}$ 有意义;

(4) 当 x, y 满足关系 _____ 时, 分式 $\frac{x+y}{x-y}$ 有意义.

解: (1) 当分母 $3x \neq 0$ 即 $x \neq 0$ 时, 分式 $\frac{2}{3x}$ 有意义;

(2) 当分母 $x-1 \neq 0$ 即 $x \neq 1$ 时, 分式 $\frac{x}{x-1}$ 有意义;

(3) 当分母 $5-3b \neq 0$ 即 $b \neq \frac{5}{3}$ 时, 分式 $\frac{1}{5-3b}$ 有意义;

(4) 当分母 $x-y \neq 0$ 即 $x \neq y$ 时, 分式 $\frac{x+y}{x-y}$ 有意义.

练习

1. 列式表示下列各量:

(1) 某村有 n 个人, 耕地 40 公顷, 人
均耕地面积为 _____ 公顷;

(2) $\triangle ABC$ 的面积为 S , BC 边长为 a ,
高 AD 为 _____;

(3) 一辆汽车行驶 a 千米用 b 小时, 它的平均车速为 _____
千米/时; 一列火车行驶 a 千米比这辆汽车少用 1 小时, 它的平
均车速为 _____ 千米/时.



2. 下列式子中, 哪些是分式? 哪些是整式? 两类式子的区别是什么?

$\frac{1}{x}, \frac{x}{3}, \frac{4}{3b^2+5}, \frac{2a-5}{3}, \frac{x}{x^2-y^2}, \frac{m-n}{m+n}, \frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}, \frac{c}{3(a-b)}$.

3. 下列分式中的字母满足什么条件时分式有意义?

(1) $\frac{2}{a};$ (2) $\frac{x+1}{x-1};$ (3) $\frac{2m}{3m+2};$

(4) $\frac{1}{x-y};$ (5) $\frac{2a+b}{3a-b};$ (6) $\frac{2}{x^2-1}.$

16.1.2 分式的基本性质

●
分数的基本性质：

一个分数的分子、分母同乘（或除以）一个不为0的数，分数的值不变。

由分数的基本性质可知，如果数 $c \neq 0$ ，那么

$$\frac{2}{3} = \frac{2c}{3c}, \quad \frac{4c}{5c} = \frac{4}{5}.$$

一般地，对于任意一个分数 $\frac{a}{b}$ 有

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}, \quad \frac{a}{b} = \frac{a \div c}{b \div c}. \quad (c \neq 0)$$

其中 a, b, c 是数。



思 考

类比分数的基本性质，你能想出分式有什么性质吗？

分式的基本性质：

分式的分子与分母同乘（或除以）一个不等于0的整式，分式的值不变。

怎样用式子表示分式的基本性质？

上述性质可以用式子表示为

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C}, \quad \frac{A}{B} = \frac{A \div C}{B \div C}. \quad (C \neq 0)$$

其中 A, B, C 是整式。

例 2 填空：

$$(1) \frac{a+b}{ab} = \frac{(\quad)}{a^2b}, \quad \frac{2a-b}{a^2} = \frac{(\quad)}{a^2b};$$

$$(2) \frac{x^2+xy}{x^2} = \frac{x+y}{(\quad)}, \quad \frac{x}{x^2-2x} = \frac{(\quad)}{x-2}.$$

解：(1) 因为 $\frac{a+b}{ab}$ 的分母 ab 乘 a 才能化为 a^2b ，

为保证分式的值不变，根据分式的基本性质，分子也需乘 a ，即

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{(a+b)a}{ab \cdot a} = \frac{a^2+ab}{a^2b}.$$

同样，因为 $\frac{2a-b}{a^2}$ 的分母 a^2 乘 b 才能化为 a^2b ，将分子也乘 b ，即

$$\frac{2a-b}{a^2} = \frac{(2a-b)b}{a^2b} = \frac{2ab-b^2}{a^2b}.$$

括号中应分别填 a^2+ab 和 $2ab-b^2$ 。

(2) 因为 $\frac{x^2+xy}{x^2}$ 的分子 x^2+xy 除以 x 才能化为 $x+y$ ，所以分母也除以 x ，即

$$\frac{x^2+xy}{x^2} = \frac{(x^2+xy) \div x}{x^2 \div x} = \frac{x+y}{x}.$$

因为 $\frac{x}{x^2-2x}$ 的分母 x^2-2x 除以 x 才能化为 $x-2$ ，所以分子也除以 x ，即

$$\frac{x}{x^2-2x} = \frac{x \div x}{(x^2-2x) \div x} = \frac{1}{x-2}.$$

括号中应分别填 x 和 1 。



联想分数的通分和约分，由例 2 你能想出如何对分式进行通分和约分吗？

与分数的通分类似，在例 2 (1) 中，我们利用分式的基本性质，使分子和分母同乘适当的整式，不改变分式的值，把 $\frac{a+b}{ab}$ 和 $\frac{2a-b}{a^2}$ 化成相同分母的分式，这样的分式变形叫做分式的通分 (changing fractions to a common denominator)。

分式约分约去的是什么?

与分数的约分类似，在例2(2)中，我们利用分式的基本性质，约去 $\frac{x^2+xy}{x^2}$ 的分子和分母的公因式 x ，不改变分式的值，使 $\frac{x^2+xy}{x^2}$ 化为 $\frac{x+y}{x}$ ，这样的分式变形叫做分式的约分(reduction of a fraction)。同样地， $\frac{x}{x^2-2x}$ 被约分为 $\frac{1}{x-2}$ 。

例3 约分：

$$(1) \frac{-25a^2bc^3}{15ab^2c}; \quad (2) \frac{x^2-9}{x^2+6x+9}.$$

分析：为约分要先找出分子和分母的公因式。

$$\text{解：(1)} \frac{-25a^2bc^3}{15ab^2c} = -\frac{5abc \cdot 5ac^2}{5abc \cdot 3b} = -\frac{5ac^2}{3b};$$

$$(2) \frac{x^2-9}{x^2+6x+9} = \frac{(x+3)(x-3)}{(x+3)^2} = \frac{x-3}{x+3}.$$

如果分子或分母是多项式，先分解因式对约分有什么作用？

例4 通分：

$$(1) \frac{3}{2a^2b} \text{ 与 } \frac{a-b}{ab^2c}; \quad (2) \frac{2x}{x-5} \text{ 与 } \frac{3x}{x+5}.$$

分析：为通分要先确定各分式的公分母，一般取各分母的所有因式的最高次幂的积作公分母，它叫做最简公分母。

解：(1) 最简公分母是 $2a^2b^2c$ 。

$$\frac{3}{2a^2b} = \frac{3 \cdot bc}{2a^2b \cdot bc} = \frac{3bc}{2a^2b^2c},$$

$$\frac{a-b}{ab^2c} = \frac{(a-b) \cdot 2a}{ab^2c \cdot 2a} = \frac{2a^2-2ab}{2a^2b^2c}.$$

(2) 最简公分母是 $(x-5)(x+5)$ 。

$$\frac{2x}{x-5} = \frac{2x(x+5)}{(x-5)(x+5)} = \frac{2x^2+10x}{x^2-25},$$

$$\frac{3x}{x+5} = \frac{3x(x-5)}{(x+5)(x-5)} = \frac{3x^2-15x}{x^2-25}.$$



思考

分数和分式在约分和通分的做法上有什么共同点？这些做法根据了什么原理？

在后面的学习中，我们将发现约分和通分对分式的运算很重要。

练习

1. 约分：

$$(1) \frac{2bc}{ac}; \quad (2) \frac{(x+y)y}{xy^2}; \quad (3) \frac{x^2+xy}{(x+y)^2}; \quad (4) \frac{x^2-y^2}{(x-y)^2}.$$

2. 通分：

$$(1) \frac{2c}{bd} \text{ 与 } \frac{3ac}{4b^2}; \quad (2) \frac{2xy}{(x+y)^2} \text{ 与 } \frac{x}{x^2-y^2}.$$

习题 16.1

复习巩固



1. 填空并判断所填式子是否为分式：

- (1) 一位作家先用 m 天写完了一部小说的上集，又用 n 天写完下集，这部小说共 120 万字，这位作家平均每天的写作量为_____；
- (2) 走一段长 10 千米的路，步行用 $2x$ 小时，骑自行车所用时间比步行所用时间的一半少 0.2 小时，骑自行车的平均速度为_____；
- (3) 甲完成一项工作需 t 小时，乙完成同样工作比甲少用 1 小时，乙的工作效率比甲大_____。



2. 下列各式中，哪些是整式，哪些是分式？

$$\frac{1}{a}, x-1, \frac{3}{m}, \frac{b}{3}, \frac{c}{a-b}, \frac{a+6}{2b}, \frac{3}{4}(x+y), \frac{x^2+2x+1}{5}, \frac{m-n}{m+n}.$$

3. 当 x 取什么值时，下列分式有意义？

$$(1) \frac{1}{3x}; \quad (2) \frac{1}{3-x}; \quad (3) \frac{x-5}{3x+5}; \quad (4) \frac{1}{x^2-16}.$$

4. 下列各组中的两个分式是否相等？为什么？

$$(1) \frac{2x}{y} \text{ 与 } \frac{4xy}{2y^2}; \quad (2) \frac{6ac}{9a^2b} \text{ 与 } \frac{2c}{3ab};$$

$$(3) \frac{x-y}{x+y} \text{ 与 } \frac{x^2-y^2}{(x+y)^2}; \quad (4) \frac{2mn}{m^2n+mn^2} \text{ 与 } \frac{2}{m+n}.$$

5. 不改变分式的值，使下列分式的分子和分母都不含“—”号：

$$(1) \frac{-5y}{-25x^2}; \quad (2) \frac{-a}{2b}; \quad (3) \frac{4m}{-3n}; \quad (4) -\frac{-x}{2y}.$$

6. 约分：

$$(1) \frac{5x}{25x^2}; \quad (2) \frac{9ab^2+6abc}{3a^2b};$$

$$(3) \frac{9a^2+6ab+b^2}{3a+b}; \quad (4) \frac{x^2-36}{2x+12}.$$

7. 通分：

$$(1) \frac{x}{3y} \text{ 与 } \frac{3x}{2y^2}; \quad (2) \frac{6c}{a^2b} \text{ 与 } \frac{c}{3ab^2};$$

$$(3) \frac{x-y}{2x+2y} \text{ 与 } \frac{xy}{(x+y)^2}; \quad (4) \frac{2mn}{4m^2-9} \text{ 与 } \frac{2m-3}{2m+3}.$$

综合运用 ►►

8. 什么条件下，下列分式有意义？

$$(1) \frac{1}{x(x-1)}; \quad (2) \frac{x+5}{x^2+1}.$$

9. 小李要打一份12 000字的文件，第一天她打字2小时，打字速度为 w 字/分，第二天她打字速度比第一天快了10字/分，并打完全部文件，第二天她打字用了多长时间？

10. 某村种植了 m 公顷玉米，总产量为 n 千克；水稻的种植面积比玉米的种植面积多 p 公顷，水稻的总产量比玉米总产量的2倍多 q 千克。写出表示玉米和水稻的单位面积产量（单位：千克/公顷）的式子。如果两式的分母不同，进行通分。



11. 有四块小场地：一块边长为 a 米的正方形，一块边长为 b 米的正方形，两块长为 a 米宽为 b 米的长方形。另有一块大长方形场地，它的面积等于上面四块场地面积的和，它的长为 $2(a+b)$ 米，用最简单的式子表示出大长方形的宽。

拓广探索 ►►

12. 下列各式对不对？如不对，写出正确答案：

$$(1) \frac{a^2 - 2a + 1}{1-a} = 1-a; \quad (2) \frac{3x-4y}{8xy-6x^2} = \frac{1}{2x}.$$

13. 什么条件下，下列分式的值为 0？

$$(1) \frac{x-1}{x}; \quad (2) \frac{5a-b}{a+b}.$$

16.2 分式的运算

16.2.1 分式的乘除

问题1 一个长方体容器的容积为 V , 底面的长为 a , 宽为 b , 当容器内的水占容积的 $\frac{m}{n}$ 时, 水高为多少?

长方体容器的高为 $\frac{V}{ab}$, 水高为 $\frac{V}{ab} \cdot \frac{m}{n}$.

问题2 大拖拉机 m 天耕地 a 公顷, 小拖拉机 n 天耕地 b 公顷, 大拖拉机的工作效率是小拖拉机的工作效率的多少倍?



大拖拉机的工作效率是 $\frac{a}{m}$ 公顷/天, 小拖拉机的工作效率是 $\frac{b}{n}$ 公顷/天, 大拖拉机的工作效率是小拖拉机的 $\left(\frac{a}{m} \div \frac{b}{n}\right)$ 倍.

从上面的问题可知, 为讨论数量关系有时需要进行分式的乘除运算.

分式与分数具有类似的形式, 由分数的运算法则可以类比地认识分式的运算法则. 为此我们先回顾分

数的乘除法法则.



观察

$$\frac{3}{5} \times \frac{15}{2} = \frac{3 \times 15}{5 \times 2} = \frac{45}{10} = \frac{9}{2},$$

$$\frac{3}{5} \div \frac{15}{2} = \frac{3}{5} \times \frac{2}{15} = \frac{3 \times 2}{5 \times 15} = \frac{6}{75} = \frac{2}{25}.$$

由上面的算式可以看到分数的乘除法法则是：

乘法法则：_____；

除法法则：_____.



思考

类比分数的乘除法法则，你能说出分式的乘除法法则吗？

怎样用式子
表示这些法则？

类似分数，分式有：

乘法法则 分式乘分式，用分子的积作为积的分子，分母的积作为积的分母。

除法法则 分式除以分式，把除式的分子、分母颠倒位置后，与被除式相乘。

上述法则可以用式子表示为：

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d},$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

例1 计算：

$$(1) \frac{4x}{3y} \cdot \frac{y}{2x^3}; \quad (2) \frac{ab^3}{2c^2} \div \frac{-5a^2b^2}{4cd}.$$

运算结果
如能约分，应
约分。

解：(1) $\frac{4x}{3y} \cdot \frac{y}{2x^3} = \frac{4xy}{6x^3y} = \frac{2}{3x^2}$ ；
(2) $\frac{ab^3}{2c^2} \div \frac{-5a^2b^2}{4cd} = \frac{ab^3}{2c^2} \cdot \frac{4cd}{-5a^2b^2} = -\frac{4ab^3cd}{10a^2b^2c^2}$
 $= -\frac{2bd}{5ac}$.

例 2 计算：

(1) $\frac{a^2-4a+4}{a^2-2a+1} \cdot \frac{a-1}{a^2-4}$ ；(2) $\frac{1}{49-m^2} \div \frac{1}{m^2-7m}$.

解：(1) $\frac{a^2-4a+4}{a^2-2a+1} \cdot \frac{a-1}{a^2-4}$
 $= \frac{(a-2)^2}{(a-1)^2} \cdot \frac{a-1}{(a-2)(a+2)}$
 $= \frac{(a-2)^2(a-1)}{(a-1)^2(a-2)(a+2)}$
 $= \frac{a-2}{(a-1)(a+2)}$ ；
(2) $\frac{1}{49-m^2} \div \frac{1}{m^2-7m}$
 $= -\frac{1}{m^2-49} \cdot (m^2-7m) = -\frac{m(m-7)}{(m+7)(m-7)}$
 $= -\frac{m}{m+7}$.

例 3 “丰收 1 号”小麦的试验田是边长为 a 米的正方形减去一个边长为 1 米的正方形蓄水池后余下的部分，“丰收 2 号”小麦的试验田是边长为 $(a-1)$ 米的正方形，两块试验田的小麦都收获了 500 千克.

- (1) 哪种小麦的单位面积产量高？
(2) 高的单位面积产量是低的单位面积产量的多少倍？

解：(1) “丰收 1 号”小麦的试验田面积是 (a^2-1) 米²，单位面积产量是 $\frac{500}{a^2-1}$ 千克/米²；“丰收 2

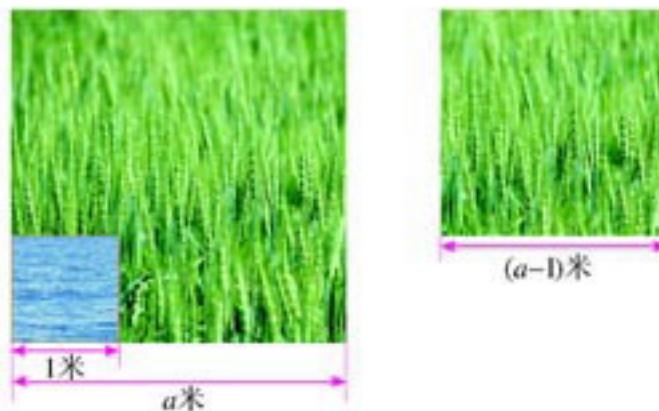


图 16.2-1

“丰收 2 号”小麦的试验田面积是 $(a-1)^2$ 米², 单位面积产量是 $\frac{500}{(a-1)^2}$ 千克/米².

根据问题的实际意义可知 $a > 1$, 所以 $(a-1)^2 = a^2 - 2a + 1 < a^2 - 2 + 1$, 即 $(a-1)^2 < a^2 - 1$.

因为 $0 < (a-1)^2 < a^2 - 1$,

所以 $\frac{500}{a^2 - 1} < \frac{500}{(a-1)^2}$.

“丰收 2 号”小麦的单位面积产量高.

$$(2) \frac{500}{(a-1)^2} \div \frac{500}{a^2 - 1} = \frac{500}{(a-1)^2} \cdot \frac{a^2 - 1}{500} = \frac{(a+1)(a-1)}{(a-1)^2} = \frac{a+1}{a-1}.$$

“丰收 2 号”小麦的单位面积产量是“丰收 1 号”小麦的单位面积产量的 $\frac{a+1}{a-1}$ 倍.

练习

1. 写出第 13 页问题 1 和问题 2 的计算结果.

2. 计算:

$$(1) \frac{3a}{4b} \cdot \frac{16b}{9a^2}; \quad (2) \frac{12xy}{5a} \div 8x^2y;$$

$$(3) -3xy \div \frac{2y^2}{3x}; \quad (4) \frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{x-y}{x+y}.$$

3. 计算:

$$(1) \frac{3a-3b}{10ab} \cdot \frac{25a^2b^3}{a^2-b^2}; \quad (2) \frac{x^2-4y^2}{x^2+2xy+y^2} \div \frac{x+2y}{2x^2+2xy}.$$

例4 计算 $\frac{2x}{5x-3} \div \frac{3}{25x^2-9} \cdot \frac{x}{5x+3}$.

乘除混合运算可以统一为乘法运算.

$$\begin{aligned} \text{解: } & \frac{2x}{5x-3} \div \frac{3}{25x^2-9} \cdot \frac{x}{5x+3} \\ &= \frac{2x}{5x-3} \cdot \frac{25x^2-9}{3} \cdot \frac{x}{5x+3} \\ &= \frac{2x^2}{3}. \end{aligned}$$

思考

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = ? \quad \left(\frac{a}{b}\right)^3 = ? \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{10} = ?$$

根据乘方的意义和分式乘法的法则, 可得:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a}{b \cdot b} = \frac{a^2}{b^2};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \underline{\quad};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{10} = \underline{\quad}.$$

归纳

一般地, 当 n 是正整数时,

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b}}_{n\uparrow} = \underbrace{\frac{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}}_{n\uparrow} = \frac{a^n}{b^n}, \text{ 即} \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n}. \end{aligned}$$

这就是说, 分式乘方要把分子、分母分别乘方.

例5 计算:

$$(1) \left(\frac{-2a^2b}{3c}\right)^2; \quad (2) \left(\frac{a^2b}{-cd^3}\right)^3 \div \frac{2a}{d^3} \cdot \left(\frac{c}{2a}\right)^2.$$

同数的混合运算一样，先乘方，再乘除。

$$\text{解：(1)} \left(\frac{-2a^2b}{3c}\right)^2 = \frac{(-2a^2b)^2}{(3c)^2} = \frac{4a^4b^2}{9c^2};$$

$$\begin{aligned}\text{(2)} & \left(\frac{a^2b}{-cd^3}\right)^3 \div \frac{2a}{d^3} \cdot \left(\frac{c}{2a}\right)^2 \\ &= \frac{a^6b^3}{-c^3d^9} \div \frac{2a}{d^3} \cdot \frac{c^2}{4a^2} \\ &= \frac{a^6b^3}{-c^3d^9} \cdot \frac{d^3}{2a} \cdot \frac{c^2}{4a^2} \\ &= -\frac{a^3b^3}{8cd^6}.\end{aligned}$$

练习

1. 计算：

$$(1) \frac{2m^2n}{3pq^2} \cdot \frac{5p^2q}{4mn^2} \div \frac{5mnp}{3q}; \quad (2) \frac{16-a^2}{a^2+8a+16} \div \frac{a-4}{2a+8} \cdot \frac{a-2}{a+2},$$

2. 计算：

$$(1) \left(\frac{-2x^4y^2}{3z}\right)^3; \quad (2) \left(\frac{2ab^3}{-c^2d}\right)^2 \div \frac{6a^4}{b^3} \cdot \left(\frac{-3c}{b^2}\right)^3.$$

16.2.2 分式的加减



问题3 甲工程队完成一项工程需 n 天，乙工程队要比甲队多用 3 天才能完成这项工程，两队共同工作一天完成这项工程的几分之几？

甲工程队一天完成这项工程的 $\frac{1}{n}$ ，乙工程队一天完成这项工程的 $\frac{1}{n+3}$ ，两队共同工作一天完成这项工程的 $\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+3}\right)$.

问题4 2001~2003 年某地的森林面积（单位：公顷）分别是 S_1 , S_2 , S_3 ，2003 年与 2002 年相比，

森林面积增长率提高了多少?

2003 年的森林面积增长率是 $\frac{S_3 - S_2}{S_2}$, 2002 年的森林面积增长率是 $\frac{S_2 - S_1}{S_1}$, 2003 年与 2002 年相比, 森林面积增长率提高了 $\frac{S_3 - S_2}{S_2} - \frac{S_2 - S_1}{S_1}$.

从上面的问题可知, 为讨论数量关系有时需要进行分式的加减法运算.

分式的加减法与分数的加减法类似, 我们先回顾分数的加减法法则.



观察

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5},$$

$$\frac{1}{5} - \frac{2}{5} = -\frac{1}{5},$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6},$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}.$$



思考

分式的加减法与分数的加减法实质相同, 类比分数的加减法, 你能说出分式的加减法法则吗?

怎样用式子
表示这些法则?

类似分数的加减法, 分式的加减法法则是:

同分母分式相加减, 分母不变, 把分子相加减;

**异分母分式相加减, 先通分, 变为同分母的分式,
再加减.**

上述法则可用式子表示为

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c},$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

例6 计算：

$$(1) \frac{5x+3y}{x^2-y^2} - \frac{2x}{x^2-y^2}; \quad (2) \frac{1}{2p+3q} + \frac{1}{2p-3q}.$$

解：(1) $\frac{5x+3y}{x^2-y^2} - \frac{2x}{x^2-y^2}$
 $= \frac{5x+3y-2y}{x^2-y^2} = \frac{3x+3y}{x^2-y^2}$
 $= \frac{3}{x-y};$

(2) $\frac{1}{2p+3q} + \frac{1}{2p-3q}$
 $= \frac{2p-3q}{(2p+3q)(2p-3q)} + \frac{2p+3q}{(2p+3q)(2p-3q)}$
 $= \frac{2p-3q+2p+3q}{(2p+3q)(2p-3q)}$
 $= \frac{4p}{4p^2-9q^2}.$

练习

1. 计算：

$$(1) \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x}, \quad (2) \frac{a}{b+1} + \frac{2a}{b+1} - \frac{3a}{b+1}.$$

2. 计算：

$$(1) \frac{1}{2c^3d} + \frac{1}{3cd^3}; \quad (2) \frac{3}{2m-n} - \frac{2m-n}{(2m-n)^2};$$

$$(3) \frac{a}{a^2-b^2} - \frac{1}{a+b}.$$

并联电路是一种基本电路。并联电路总电阻 R 与各支路电阻 R_1, R_2, \dots, R_n 的关系为

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}.$$

例 7 在图 16.2-2 的电路中, 已测定 CAD 支路的电阻是 R_1 欧姆, 又知 CBD 支路的电阻 R_2 比 R_1 大 50 欧姆, 根据电学有关定律可知总电阻 R 与 R_1, R_2 满足关系式 $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, 试用含有 R_1 的式子表示总电阻 R .

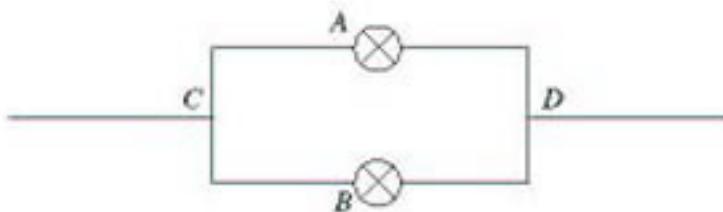


图 16.2-2

解: 因为

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1 + 50} \\ &= \frac{R_1 + 50}{R_1(R_1 + 50)} + \frac{R_1}{R_1(R_1 + 50)} \\ &= \frac{2R_1 + 50}{R_1(R_1 + 50)},\end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{R} = \frac{2R_1 + 50}{R_1(R_1 + 50)},$$

$$\text{所以 } R = \frac{R_1(R_1 + 50)}{2R_1 + 50} = \frac{R_1^2 + 50R_1}{2R_1 + 50}.$$

例 8 计算: $\left(\frac{2a}{b}\right)^2 \cdot \frac{1}{a-b} - \frac{a}{b} \div \frac{b}{4}$.

$$\begin{aligned}\text{解: } \left(\frac{2a}{b}\right)^2 \cdot \frac{1}{a-b} - \frac{a}{b} \div \frac{b}{4} \\ &= \frac{4a^2}{b^2} \cdot \frac{1}{a-b} - \frac{a}{b} \cdot \frac{4}{b} \\ &= \frac{4a^2}{b^2(a-b)} - \frac{4a}{b^2} = \frac{4a^2}{b^2(a-b)} - \frac{4a(a-b)}{b^2(a-b)}\end{aligned}$$

式与数有相同的混合运算顺序:
先乘方, 再乘除,
然后加减.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4a^2 - 4a^2 + 4ab}{b^2(a-b)} = \frac{4ab}{b^2(a-b)} \\
 &= \frac{4a}{ab-b^2}.
 \end{aligned}$$

练习

1. 写出第 18 页问题 3 和问题 4 的计算结果.
2. 计算:

$$(1) \left(\frac{x}{2y}\right)^2 \cdot \frac{y}{2x} - \frac{x}{y^2} \div \frac{2y^2}{x};$$

$$(2) \frac{x+1}{x} \cdot \left(\frac{2x}{x+1}\right)^2 - \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right).$$

16.2.3 整数指数幂

我们知道, 当 n 是正整数时,

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{个}}$$

正整数指数幂有以下运算性质:

- (1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (m, n 是正整数);
- (2) $(a^m)^n = a^{mn}$ (m, n 是正整数);
- (3) $(ab)^n = a^n b^n$ (n 是正整数);
- (4) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ($a \neq 0, m, n$ 是正整数,
 $m > n$);
- (5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ (n 是正整数).

其中, 第(5)个性质就是分式的乘方法则.

此外, 我们还学习过 0 指数幂, 即当 $a \neq 0$ 时, $a^0 = 1$.

在学习有理数时, 我们曾见过

$$1 \text{ 纳米} = 10^{-9} \text{ 米}, \text{ 即 } 1 \text{ 纳米} = \frac{1}{10^9} \text{ 米}.$$

思考

学习了分式后，对指数的认识会有新发展。即将讨论的 a^{-n} （ n 是正整数）就属于分式。

一般地， a^m 中指数 m 可以是负整数吗？如果可以，那么负整数指数幂 a^m 表示什么？

由分式的约分可知，当 $a \neq 0$ 时，

$$a^3 \div a^5 = \frac{a^3}{a^5} = \frac{a^3}{a^3 \cdot a^2} = \frac{1}{a^2}, \quad ①$$

另一方面，如果把正整数指数幂的运算性质（4）

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0, m, n \text{ 是正整数}, m > n)$$

中的条件 $m > n$ 去掉，即假设这个性质对于 $a^3 \div a^5$ 的情形也能使用，则有

$$a^3 \div a^5 = a^{3-5} = a^{-2}. \quad ②$$

由①②两式，我们想到如果规定 $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ ($a \neq 0$)，就

能使 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 这条性质也适用于像 $a^3 \div a^5$ 这样的情形。为使上述运算性质适用范围更广，同时也可以更简便地表示分式，数学中规定：

一般地，当 n 是正整数时，

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0).$$

这就是说， a^{-n} ($a \neq 0$) 是 a^n 的倒数。

像上面这样引入负整数指数幂后，指数的取值范围就推广到全体整数。

你现在能说出当 m 分别是正整数、0、负整数时， a^m 各表示什么意思吗？

现在我们考虑：引入负整数指数和0指数后， $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (m, n 是正整数) 这条性质能否扩大到 m, n 是整数的情形。

可以换其他整数指数再验证这个规律.

观察

$$a^3 \cdot a^{-5} = \frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^2} = a^{-2} = a^{3+(-5)}, \text{ 即}$$

$$a^3 \cdot a^{-5} = a^{3+(-5)};$$

$$a^{-3} \cdot a^{-5} = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a^5} = \frac{1}{a^8} = a^{-8} = a^{-3+(-5)}, \text{ 即}$$

$$a^{-3} \cdot a^{-5} = a^{-3+(-5)};$$

$$a^0 \cdot a^{-5} = 1 \cdot \frac{1}{a^5} = \frac{1}{a^5} = a^{-5} = a^{0+(-5)}, \text{ 即}$$

$$a^0 \cdot a^{-5} = a^{0+(-5)}.$$

归纳

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 这条性质对于 m, n 是任意整数的情形仍然适用.

探究

类似于上面的观察，你可以进一步用负整数指数幂或 0 指数幂，对于前面提到的其他正整数指数幂的运算性质进行试验，看看这些性质在整数指数幂范围内是否还适用。

事实上，随着指数的取值范围推广到全体整数，上述性质也推广到整数指数幂。

例 9 计算：

$$(1) (a^{-1}b^2)^3; \quad (2) a^{-2}b^2 \cdot (a^2b^{-2})^{-3}.$$

解: (1) $(a^{-1}b^2)^3 = a^{-3}b^6 = \frac{b^6}{a^3}$;

$$(2) a^{-2}b^2 \cdot (a^2b^{-2})^{-3} = a^{-2}b^2 \cdot a^{-6}b^6$$

$$= a^{-8}b^8 = \frac{b^8}{a^8}.$$

负数的引入可以使减法转化为加法, 即
 $x - y = x + (-y)$;

负指数幂的引入可以使除法转化为幂的乘法, 即

$$\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}.$$

例 10 下列等式是否正确? 为什么?

$$(1) a^m \div a^n = a^{m-n}; \quad (2) \left(\frac{a}{b}\right)^n = a^n b^{-n}.$$

解: (1) 因为 $a^m \div a^n = a^{m-n} = a^{m+(-n)} = a^m \cdot a^{-n}$,
 所以 $a^m \div a^n = a^{m-n}$;

$$(2) \text{因为 } \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} = a^n \cdot \frac{1}{b^n} = a^n b^{-n},$$

$$\text{所以 } \left(\frac{a}{b}\right)^n = a^n b^{-n}.$$

练习

1. 填空:

- (1) $3^2 = \underline{\hspace{2cm}}$, $3^0 = \underline{\hspace{2cm}}$, $3^{-2} = \underline{\hspace{2cm}}$;
- (2) $(-3)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$, $(-3)^0 = \underline{\hspace{2cm}}$, $(-3)^{-2} = \underline{\hspace{2cm}}$;
- (3) $b^2 = \underline{\hspace{2cm}}$, $b^0 = \underline{\hspace{2cm}}$, $b^{-2} = \underline{\hspace{2cm}} (b \neq 0)$.

2. 计算:

$$(1) x^2 y^{-1} (x^{-1} y)^2; \quad (2) (2ab^2 c^{-3})^{-1} \div (a^{-1} b)^2.$$

我们已经知道, 一些较大的数适合用科学记数法表示. 例如, 光速约为 3×10^8 米/秒, 太阳半径约为 6.96×10^5 千米, 目前世界人口约为 6.1×10^9 等.

有了负整数指数幂后, 小于 1 的正数也可以用科学记数法表示. 例如, $0.000\ 01 = 10^{-5}$, $0.000\ 025\ 7 = 2.57 \times 10^{-5}$, $0.000\ 000\ 025\ 7 = 2.57 \times 10^{-8}$ 等, 即小于 1 的正数可以用科学记数法表示为 $a \times 10^{-n}$ 的形

式，其中 a 是整数数位只有一位的数， n 是正整数。这种形式更便于比较数的大小，例如 2.57×10^{-5} 显然大于 2.57×10^{-8} ，前者是后者的 10^3 倍。



对于一个小于 1 的正小数，如果小数点后至第一个非 0 数字前有 8 个 0，用科学记数法表示这个数时， 10 的指数是多少？如果有 m 个 0 呢？

● 纳米技术是一种高新技术，它可以在微观世界里直接探索 $0.1\sim 500$ 纳米范围内物质的特性，从而创造新材料。这项技术有重要应用。



例 11 纳米是非常小的长度单位， 1 纳米 $= 10^{-9}$ 米。把 1 纳米的物体放到乒乓球上，就如同把乒乓球放到地球上。 1 立方毫米的空间可以放多少个 1 立方纳米的物体？

解： 1 毫米 $= 10^{-3}$ 米， 1 纳米 $= 10^{-9}$ 米。
 $(10^{-3})^3 \div (10^{-9})^3 = 10^{-9} \div 10^{-27} = 10^{-9-(-27)} = 10^{18}$.

1 立方毫米的空间可以放 10^{18} 个 1 立方纳米的物体。

10^{18} 是一个非常巨大的数字，它是 1 亿（即 10^8 ）的 100 亿（即 10^{10} ）倍。



练习

1. 用科学记数法表示下列数：

$$0.000\ 000\ 001, \quad 0.001\ 2, \quad 0.000\ 000\ 345,$$
$$-0.000\ 03, \quad 0.000\ 000\ 010\ 8.$$

2. 计算：

$$(1) (2 \times 10^{-6}) \times (3.2 \times 10^3); \quad (2) (2 \times 10^{-6})^2 \div (10^{-4})^3.$$

习题 16.2

复习巩固

1. 计算:

$$(1) \frac{6ab}{5c^2} \cdot \frac{10c}{3b};$$

$$(2) \frac{-7x}{3yz} \cdot \left(-\frac{9y^2}{x^2}\right);$$

$$(3) \frac{2m}{5n} \div \frac{4m^2}{10n^3};$$

$$(4) \frac{-x}{5y} \div \left(-\frac{4x^2}{5y^2}\right).$$

2. 计算:

$$(1) \frac{4a+4b}{5ab} \cdot \frac{15a^2b}{a^2-b^2};$$

$$(2) \frac{x^2-4y^2}{x^2+4x+4} \cdot \frac{x+2}{3x^2+6xy};$$

$$(3) \frac{x^2+1}{x-6} \cdot \frac{x^2-36}{x^3+x};$$

$$(4) \frac{y^2-x^2}{5x^2-4xy} \div \frac{x+y}{5x-4y}.$$

3. 计算:

$$(1) \frac{4a^2b}{3cd^2} \cdot \frac{5c^2d}{4ab^2} \div \frac{2abc}{3d};$$

$$(2) \frac{81-a^2}{a^2+6a+9} \div \frac{a-9}{2a+6} \cdot \frac{a+3}{a+9};$$

$$(3) \left(\frac{-3x^3y}{3z^2}\right)^2;$$

$$(4) \left(\frac{-a}{b}\right)^2 \div \left(\frac{2a^2}{5b}\right)^2 \cdot \frac{a}{5b}.$$

4. 计算:

$$(1) \frac{a}{a+1} + \frac{1}{a+1};$$

$$(2) \frac{3}{x+1} - \frac{3x}{x+1};$$

$$(3) \frac{a}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a+1)^2};$$

$$(4) \frac{3}{(x-1)^2} - \frac{3x}{(x-1)^2}.$$

5. 计算:

$$(1) \frac{2a}{5a^2b} + \frac{3b}{10ab^2};$$

$$(2) \frac{2m}{5n^2p} - \frac{3n}{4mp^2};$$

$$(3) \frac{3y}{2x+2y} + \frac{2xy}{x^2+xy};$$

$$(4) \frac{2x}{x^2-64y^2} - \frac{1}{x-8y}.$$

6. 计算:

$$(1) \left(\frac{x}{x+y} + \frac{2y}{x+y}\right) \cdot \frac{xy}{x+2y} \div \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right);$$

$$(2) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 \div \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right);$$

$$(3) \left(\frac{3x^2}{4y}\right)^2 \cdot \frac{2y}{3x} + \frac{x^2}{2y^2} \div \frac{2y^2}{x};$$

$$(4) \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 \cdot \frac{2a-2b}{3a+3b} - \frac{a^2}{a^2-b^2} \div \frac{a}{b}.$$

7. 计算:

$$(1) 3a^{-2}b \cdot 2ab^{-2};$$

$$(2) 4xy^2z \div (-2x^{-2}yz^{-1});$$

$$(3) (-3ab^{-1})^3;$$

$$(4) (2m^2n^{-2})^2 \cdot 3m^{-3}n^3.$$

8. 用科学记数法表示下列数:

0.000 01, 0.000 02, 0.000 000 567, 0.000 000 301.

9. 计算:

$$(1) (2 \times 10^{-3}) \times (5 \times 10^{-3});$$

$$(2) (3 \times 10^{-5})^2 \div (3 \times 10^{-1})^2.$$

综合运用 ►►

10. 一艘船顺流航行 n 千米用了 m 小时, 如果逆流航速是顺流航速的 $\frac{p}{q}$, 那么这艘船逆流航行 t 小时走了多少路程?

11. 在一块 a 公顷的稻田上插秧, 如果 10 个人插秧, 要用 m 天完成; 如果一台插秧机工作, 要比 10 个人插秧提前 3 天完成. 一台插秧机的工作效率是一个人工作效率的多少倍?



12. 绿化队原来用漫灌方式浇绿地, a 天用水 m 吨, 现在改用喷灌方式, 可使这些水多用 3 天, 现在比原来每天节约用水多少吨?

13. 一块麦田有 m 公顷, 甲收割完这块麦田需 n 小时, 乙比甲少用 0.5 小时就能收割完这块麦田, 两人一起收割完这块麦田需要多少小时?

14. 两地相距 n 千米, 提速前火车从一地到另一地要用 t 小时, 提速后行车时间减少了 0.5 小时, 提速后火车的速度比原来速度快了多少?

拓广探索 ►►

15. 计算下列两式, 探索其中的共同规律:

$$(1) \frac{p}{mn} + \frac{m}{np} + \frac{n}{pm};$$

$$(2) \frac{c-a}{(a-b)(b-c)} + \frac{a-b}{(b-c)(c-a)} + \frac{b-c}{(c-a)(a-b)}.$$

16. 一个无盖长方体盒子的容积是 V .

(1) 如果盒子底面是边长等于 a 的正方形, 这个盒子的外表面积是多少?

(2) 如果盒子底面是长等于 b 、宽等于 c 的矩形, 这个盒子的外表面积是多少?

(3) 上面两种情况下, 如果盒子的底面面积相等, 那么两种盒子的外表面积相差多少?



阅读与思考

选学

容器中的水能倒完吗

请看下面的问题:

一个容器装有 1 升水, 按照如下要求把水倒出: 第 1 次倒出 $\frac{1}{2}$ 升水, 第 2 次倒出水量是 $\frac{1}{2}$ 升的 $\frac{1}{3}$, 第 3 次倒出水量是 $\frac{1}{3}$ 升的 $\frac{1}{4}$, 第 4 次倒出水量是 $\frac{1}{4}$ 升的 $\frac{1}{5}$ ……第 n 次倒出水量是 $\frac{1}{n}$ 升的 $\frac{1}{n+1}$ ……按照这种倒水的方法, 这 1 升水经多少次可以倒完?

你可能会想到通过实验探寻问题的答案, 但是实验中要精确地测量倒出水量, 当倒出水量很小时测量的难度非常大. 我们能否用数学方法替代实验解决上面的问题呢?

容易列出倒 n 次水的总倒出水量为

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)}. \quad ①$$

根据分式的减法法则,

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

反过来, 有

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}. \quad ②$$

利用②可以把①改写为

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right). \quad ③$$

合并③中的相反数，得 $1 - \frac{1}{n+1}$ ，即倒 n 次水的总倒出水量为

$$1 - \frac{1}{n+1} - \frac{n}{n+1} \text{ (升)}.$$

可以发现，按这种方法倒水，随着倒水次数 n 的不断增加，总倒出水量 $\frac{n}{n+1}$ 也不断增加，然而，不论倒水次数 n 有多大，总倒水量 $\frac{n}{n+1}$ 总小于 1。因此，容器中的 1 升水是倒不完的。这样，我们就用数学方法分析解决了上面的问题。

16.3 分式方程

现在回到本章引言中的问题：

一艘轮船在静水中的最大航速为 20 千米/时，它沿江以最大航速顺流航行 100 千米所用时间，与以最大航速逆流航行 60 千米所用时间相等，江水的流速为多少？

分析：设江水的流速为 v 千米/时，填空：

轮船顺流航行速度为 _____ 千米/时，逆流航行速度为 _____ 千米/时，顺流航行 100 千米所用时间为 _____ 小时，逆流航行 60 千米所用时间为 _____ 小时。

完成上面的填空后，根据“两次航行所用时间相等”这一等量关系，可以得到方程

$$\frac{100}{20+v} = \frac{60}{20-v}, \quad ①$$

方程①的分母中含未知数 v ，像这样分母中含未知数的方程叫做**分式方程** (fractional equation)。我们以前学习的方程都是整式方程，它们的未知数不在分母中。



思考

分式方程的特征是什么？如何解分式方程①？

我们已经熟悉一元一次方程等整式方程的解法，但是分式方程的分母中含未知数，因此解分式方程是一个新的问题。能否将分式方程化为整式方程呢？我

将方程①化成整式方程的关键步骤是什么？

们自然会想到通过“去分母”实现这种转变.

分式方程①中各分母的最简公分母是

$$(20+v)(20-v).$$

方程①两边同乘 $(20+v)(20-v)$ ，得

$$100(20-v) = 60(20+v).$$

解得

$$v=5.$$

检验：将 $v=5$ 代入①中，左边=4=右边，因此 $v=5$ 是分式方程①的解.

由上可知，江水的流速为5千米/时.

归 纳

解分式方程①的基本思路是将分式方程化为整式方程，具体做法是“去分母”，即方程两边同乘最简公分母. 这也是解分式方程的一般思路和做法.

再讨论一个分式方程

$$\frac{1}{x-5} = \frac{10}{x^2-25}. \quad ②$$

为去分母，在方程两边同乘最简公分母 $(x-5)(x+5)$ ，得整式方程

$$x+5=10.$$

解得

$$x=5.$$

$x=5$ 是原分式方程的解吗？

将 $x=5$ 代入原分式方程检验，发现这时分母 $x-5$ 和 x^2-25 的值都为0，相应的分式无意义. 因此， $x=5$ 虽是整式方程 $x+5=10$ 的解，但不是原分式方程 $\frac{1}{x-5} = \frac{10}{x^2-25}$ 的解. 实际上，这个分式方程无解.

 思考

上面两个分式方程中,为什么 $\frac{100}{20+v}=\frac{60}{20-v}$ ①去分母后所得整式方程的解就是①的解,而 $\frac{1}{x-5}=\frac{10}{x^2-25}$ ②去分母后所得整式方程的解却不是②的解呢?

解分式方程去分母时,方程两边要同乘一个含未知数的式子(最简公分母).方程①两边同乘 $(20+v)(20-v)$,得到整式方程并进而得到它的解 $v=5$.当 $v=5$ 时, $(20+v)(20-v)\neq 0$,这就是说,为去分母,①两边同乘了一个不为0的式子,因此所得整式方程的解与①的解相同.方程 $\frac{1}{x-5}=\frac{10}{x^2-25}$ ②两边同乘 $(x-5)(x+5)$,得到整式方程并进而得到它的解 $x=5$.当 $x=5$ 时, $(x-5)(x+5)=0$,这就是说,为去分母,②两边同乘了一个等于0的式子,这时所得整式方程的解使②出现分母为0的现象,因此这样的解不是②的解.

 归纳

一般地,解分式方程时,去分母后所得整式方程的解有可能使原方程中分母为0,因此应如下检验:将整式方程的解代入最简公分母,如果最简公分母的值不为0,则整式方程的解是原分式方程的解;否则,这个解不是原分式方程的解.

讨 论

上述检验方法依据什么道理?

例1 解方程 $\frac{2}{x-3} = \frac{3}{x}$.

解: 方程两边同乘 $x(x-3)$, 得

$$2x = 3x - 9.$$

解得

$$x = 9.$$

检验: $x=9$ 时 $x(x-3) \neq 0$, 9 是原分式方程的解.

例2 解方程 $\frac{x}{x-1} - 1 = \frac{3}{(x-1)(x+2)}$.

解: 方程两边同乘 $(x-1)(x+2)$, 得

$$x(x+2) - (x-1)(x+2) = 3.$$

化简, 得

$$x+2=3.$$

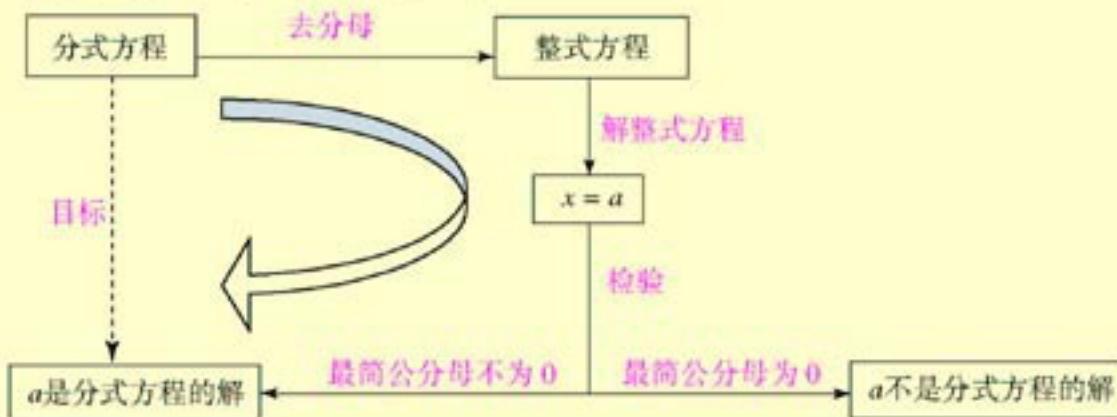
解得

$$x = 1.$$

检验: $x=1$ 时 $(x-1)(x+2)=0$, 1 不是原分式方程的解, 原分式方程无解.

归 纳

解分式方程的一般步骤如下:





练习

解方程：

$$(1) \frac{1}{2x} = \frac{2}{x+3};$$

$$(2) \frac{x}{x+1} = \frac{2}{3x+3} + 1;$$

$$(3) \frac{2}{x-1} = \frac{4}{x^2-1};$$

$$(4) \frac{5}{x^2+x} - \frac{1}{x^2-x} = 0.$$

解决实际问题中，有时需要列、解分式方程。



例3 两个工程队共同参与一项筑路工程，甲队单独施工 1 个月完成总工程的三分之一，这时增加了乙队，两队又共同工作了半个月，总工程全部完成。哪个队的施工速度快？

分析：甲队 1 个月完成总工程的 $\frac{1}{3}$ ，设乙队如果单独施工 1 个月能完成总工程的 $\frac{1}{x}$ ，那么甲队半个月完成总工程的 _____，乙队半个月完成总工程的 _____，两队半个月完成总工程的 _____。

在用式子表示上述的量之后，再考虑如何列出方程。

解：设乙队如果单独施工 1 个月能完成总工程的 $\frac{1}{x}$ 。

记总工程量为 1，根据工程的实际进度，得

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2x} = 1,$$

方程两边同乘 $6x$ ，得

$$2x + x + 3 = 6x.$$

解得

$$x = 1.$$

检验： $x = 1$ 时 $6x \neq 0$ ， $x = 1$ 是原分式方程

问题中的哪
个等量关系可以
用来列方程？

的解.

由上可知, 若乙队单独工作 1 个月可以完成全部任务, 对比甲队 1 个月完成任务的 $\frac{1}{3}$, 可知乙队施工速度快.

例 4 从 2004 年 5 月起某列车平均提速 v 千米/时, 用相同的时间, 列车提速前行驶 s 千米, 提速后比提速前多行驶 50 千米, 提速前列车的平均速度为多少?

表达问题时, 用字母不仅可以表示未知数(量), 也可以表示已知数(量).

分析: 这里的字母 v , s 表示已知数据, 设提速前列车的平均速度为 x 千米/时, 先考虑下面的填空:

提速前列车行驶 s 千米所用时间为 _____ 小时, 提速后列车的平均速度为 _____ 千米/时, 提速后列车运行 $(s+50)$ 千米所用时间为 _____ 小时.

根据行驶时间的等量关系可以列出方程.

解: 设提速前这次列车的平均速度为 x 千米/时, 则提速前它行驶 s 千米所用时间为 $\frac{s}{x}$ 小时, 提速后列车的平均速度为 $(x+v)$ 千米/时, 提速后它运行 $(s+50)$ 千米所用时间为 $\frac{s+50}{x+v}$ 小时.

根据行驶时间的等量关系, 得

$$\frac{s}{x} = \frac{s+50}{x+v}. \quad ①$$

方程两边同乘 $x(x+v)$, 得

$$s(x+v) = x(s+50).$$

去括号, 得

$$sx + sv = sx + 50x.$$

移项、合并, 得

$$50x = sv.$$

解得

$$x = \frac{sv}{50}.$$

检验：由于 v, s 都是正数， $x = \frac{sv}{50}$ 时 $x(x+v) \neq 0$ ，

$\frac{sv}{50}$ 是原分式方程的解。

答：提速前列车的平均速度为 $\frac{sv}{50}$ 千米/时。

上面例题中，出现了用一些字母表示已知数据的形式，这在分析问题寻找规律时经常出现。方程①是以 x 为未知数的分式方程，其中 v, s 是已知常数，根据它们所表示的实际意义可知，它们是正数。

练习

- 八年级学生去距学校 10 千米的博物馆参观，一部分同学骑自行车先走，过了 20 分后，其余同学乘汽车出发，结果他们同时到达。已知汽车的速度是骑车同学速度的 2 倍，求骑车同学的速度。



- 一个圆柱形容器的容积为 V 立方米，开始用一根小水管向容器内注水，水面高度达到容器高度一半后，改用一根口径为小水管 2 倍的大水管注水，向容器中注满水的全过程共用时间 t 分。求两根水管各自的注水速度。

习题 16.3

复习巩固 ►►

1. 解下列方程:

$$(1) \frac{1}{x} = \frac{5}{x+3};$$

$$(2) \frac{x}{x-1} = \frac{3}{2x-2} - 2;$$

$$(3) \frac{2}{2x-1} = \frac{4}{4x^2-1};$$

$$(4) \frac{3}{x^2+2x} - \frac{1}{x^2-2x} = 0;$$

$$(5) \frac{x-1}{x-3} = \frac{x+1}{x-1};$$

$$(6) \frac{x-3}{x-2} + 1 = \frac{3}{2-x};$$

$$(7) \frac{2x+1}{x^2+x} = \frac{5}{6x+6};$$

$$(8) \frac{3}{2} - \frac{1}{3x-1} = \frac{5}{6x-2}.$$

2. 解方程求 x :

$$(1) \frac{a}{x-a} + b = 1 (b \neq 1);$$

$$(2) \frac{m}{x} - \frac{n}{x+1} = 0 (m \neq n).$$

综合运用 ►►

3. A、B 两种机器人都被用来搬运化工原料, A 型机器人比 B 型机器人每小时多搬运 30 kg, A 型机器人搬运 900 kg 所用时间与 B 型机器人搬运 600 kg 所用时间相等, 两种机器人每小时分别搬运多少化工原料?



4. 甲、乙两人分别从距目的地 6 千米和 10 千米的两地同时出发, 甲、乙的速度比是 3 : 4, 结果乙比甲提前 20 分到达目的地. 求甲、乙的速度.
5. 张明 4 小时清点完一批图书的一半, 李强加入清点另一半图书的工作, 两人合作 1 小时清点完另一半图书. 如果李强单独清点这批图书需要几小时?

拓广探索 ►►

6. 改良玉米品种后，迎春村玉米平均每公顷增加产量 a 吨，原来产 m 吨玉米的一块土地，现在的总产量增加了20吨。原来和现在玉米的平均每公顷产量各是多少？
7. 两个小组同时开始攀登一座450米高的山，第一组的攀登速度是第二组的1.2倍，他们比第二组早15分到达顶峰。两个小组的攀登速度各是多少？
如果本题中山高为 h 米，第一组的攀登速度比第二组快 a 米/分，并比第二组早 t 分到达顶峰，则两组的攀登速度各是多少？
8. 联系实际问题，编写出关于分式方程的应用题，并解出应用题的答案。





数学活动

活动1 探究比例的性质

设 a, b, c, d 都不等于 0，并且 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ （即 a, b, c, d 成比例），根据分式的基本性质及运算法则，探究下面各组中的两个分式之间有什么关系。

$$(1) \frac{a}{c} \text{ 和 } \frac{b}{d}; \quad (2) \frac{b}{a} \text{ 和 } \frac{d}{c};$$

$$(3) \frac{a+b}{b} \text{ 和 } \frac{c+d}{d}; \quad (4) \frac{a+b}{a-b} \text{ 和 } \frac{c+d}{c-d} (a \neq b, c \neq d).$$

可以先用具体数字试验，再对发现的规律进行证明。

活动2 计算长度

现有铁丝和铜丝各一捆（可以称出每捆重多少），已知铁丝和铜丝的截面半径分别是 r_1 cm 和 r_2 cm，请你设计一种方法，不用直接测量长度，就能计算这捆铁丝和这捆铜丝的长度差。

（注：铁的密度为 7.8 g/cm^3 ，铜的密度为 8.9 g/cm^3 。）

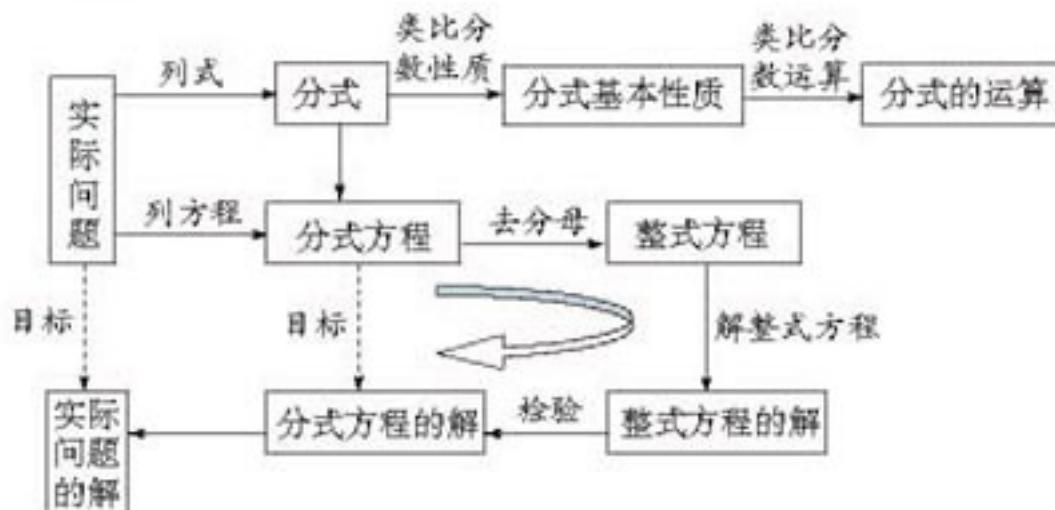
活动3 设计镜框

现要制作一个长方形（或正方形）镜框，使镜框四周围成的面积为 1 m^2 。请设计出一种方案，使镜框的周长最小，并说明这样设计的理由。

（提示：设镜框一边长为 $x \text{ m}$ ，另一边为 $\frac{1}{x} \text{ m}$ ，考虑 x 为何值时周长 $2\left(x + \frac{1}{x}\right) \text{ m}$ 最小。）

小结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

1. 如何用式子形式表示分式的基本性质和运算法则？通过类比分数和分式的基本性质和运算法则，你有什么认识？类比的方法在本章学习中起什么作用？
2. 分式怎样约分和通分？具体做法的依据是什么？
3. n 是正整数时， a^n ($a \neq 0$) 表示什么意思？整数指数幂有哪些运算性质？
4. 解分式方程的基本思路是什么？怎样使分式方程化为整式方程？解分式方程要注意什么？为什么解分式方程要检验？
5. 结合利用分式方程解决实际问题的例子，进一步体会建立方程这种数学模型的作用。

复习题 16

复习巩固 ►►

1. 下列各式中，哪些是整式，哪些是分式？

$$\frac{x}{3}, \frac{1}{n}, \frac{1}{a+5}, \frac{a+b}{15}, \frac{z}{x^2y}, \frac{2ab}{(a+b)^2}.$$

2. 计算：

$$(1) \frac{s-2t}{3s} \cdot \frac{6s^2}{s+2t};$$

$$(2) \frac{x-y}{x+y} \div (x-y)^2;$$

$$(3) \frac{2a}{a+1} + \frac{2}{a+1};$$

$$(4) \frac{u-2v}{u+2v} - \frac{2}{u^2-4v^2};$$

$$(5) \left(\frac{-3x}{y^2z}\right)^2;$$

$$(6) \left(\frac{x-y}{x+2y}\right)^3.$$

3. 计算：

$$(1) \frac{2m}{3n} \cdot \left(\frac{3n}{p}\right)^2 \div \frac{mn}{p^2};$$

$$(2) a^2b^3 \cdot (ab^2)^{-2};$$

$$(3) \frac{x^2-16}{x^2+8x+16} + \frac{x}{x-4};$$

$$(4) \left(\frac{pq}{2r}\right)^3 \div \frac{2p}{r^2} + \frac{1}{2q};$$

$$(5) 1 \div \left(2x + \frac{1-x^2}{x}\right);$$

$$(6) \frac{a-b}{a} \div \left(a - \frac{2ab-b^2}{a}\right).$$

4. 解下列方程：

$$(1) \frac{5x+2}{x^2+x} = \frac{3}{x+1};$$

$$(2) \frac{2x}{2x-5} - \frac{2}{2x+5} = 1.$$

综合运用 ►►

5. 当 x 取什么数时，下列式子有意义？

$$(1) \frac{x-2}{2x+1} - \frac{1}{x-2};$$

$$(2) \frac{3x}{x+2} \div \frac{x-2}{2x-3}.$$

6. 填空：

(1) 当 x 为_____时，分式 $\frac{3x-6}{2x+1}$ 的值为 0；

(2) 当 x 为_____时，分式 $\frac{2x+1}{x^2}$ 的值为正；

(3) 当 x 为_____时，分式 $\frac{x-2}{x^2}$ 的值为负。

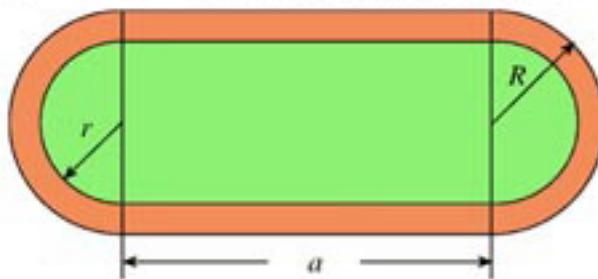
7. 什么情况下 $2(x+1)^{-1}$ 与 $3(x-2)^{-1}$ 的值相等？

8. 某工厂现在平均每天比原计划多生产 50 台机器，现在生产 600 台机器所需时间与原计划生产 450 台机器所需时间相同，现在平均每天生产多少台机器？
9. 一台收割机的工作效率相当于一个农民工作效率的 150 倍，用这台机器收割 10 公顷小麦比 100 个农民人工收割这些小麦要少用 1 小时，这台收割机每小时收割多少公顷小麦？
10. 一辆汽车开往距离出发地 180 千米的目的地，出发后第一小时内按原计划的速度匀速行驶，一小时后加速为原来速度的 1.5 倍，并比原计划提前 40 分到达目的地，求前一小时的平均行驶速度。



拓广探索 ▶▶

11. 如图，运动场两端的半圆形跑道外径为 R ，内径为 r ，中间为直跑道，整个跑道总面积为 S ，请用含 S , R , r 的式子表示直跑道的长 a 。



(第 11 题)

12. (1) 式子 $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}$ 的值能否为 0? 为什么?
- (2) 式子 $\frac{a-b}{(b-c)(c-a)} + \frac{b-c}{(a-b)(c-a)} + \frac{c-a}{(a-b)(b-c)}$ 的值能否为 0? 为什么?